подкаскад $\{T^{kt}\}$ является Б-системой на множестве Γ_0, к-рое, очевидно, $\{T^{kt}\}$-инвариантно. Кроме того, для большинства случайных последовательностей f_t, порождённых достаточно гладкими ф-циями f по ф-ле $f_t(x)=f(T^t x)$, выполняется центральная предельная теорема. Всё сказанное касается, в частности, систем Аносова: если к тому же для такой системы риманов объём инвариантен, то дискретная компонента в её спектре отсутствует и она является Б-системой.

Методы, развитые в теории гиперболич. систем, нашли приложение в теории систем биллиардного типа и в теории одномерных отображений.

Динамические системы биллиардного типа

ДС (поток), описывающая точечную частицу, к-рая движется по инерции внутри нек-рой области Q, отражаясь от её границы ∂Q по закону «угол падения равен углу отражения», наз. биллиардной системой или математич. биллиардом. Т. к. длина вектора скорости при таком движении не зависит от времени, в качестве фазового пространства X берётся совокупность всех векторов постоянной (напр., единичной) длины, приложенных в точках множества $Q\bigcup\partial Q$. Если Q — область n-мерного пространства R^n, то X можно отождествить с множеством пар (q, v), где $q\in Q\bigcup\partial Q$, а v — точка $n-1$-мерной сферы S^{n-1}, т. е. $X=(Q\bigcup\partial Q)\times S^{n-1}$. Инвариантная мера имеет вид $dqdv$, где dq — элемент n-мерного объёма, а dv — элемент $n-1$-мерного объёма на S^{n-1}.

С биллиардами связаны нек-рые задачи классич. и квантовой механики. Так, движение по отрезку прямой n материальных точек, упруго сталкивающихся друг с другом и с концами отрезка, сводится к биллиарду в n-мерном многограннике (при $n=2$ — в треугольнике). Аналогичная система из n упругих шаров в прямоугольном ящике сводится к биллиарду в более сложной области, граница к-рой состоит из кусков цилиндрич. гиперповерхностей. В этих примерах постоянство длины движущегося вектора служит выражением закона сохранения энергии. Рассмотрение биллиарда в области с гладкой границей позволяет получить содержательную информацию о спектре *Дирихле задачи* в такой области.

В зависимости от вида границы ∂Q выделяют неск. классов биллиардов с существенно разл. эргодич. свойствами, к-рые к настоящему времени (1997) изучены далеко не полностью.

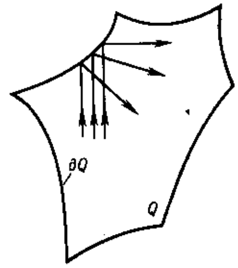
Кое-что известно о биллиардах в многоугольниках и многогранниках, в частности то, что энтропия такого биллиарда равна нулю и что биллиард в большинстве прямоугольных треугольников эргодичен. Рассмотрим биллиард в n-угольнике с углами α_i, к-рые соизмеримы с π (т. е. $\alpha_i=l_i\pi/m_i$, где l_i, m_i — целые числа). Всякой траектории биллиарда отвечает её проекция на Q — ломаная линия L со звеньями, концы к-рых лежат на сторонах многоугольника. Вследствие соизмеримости всех α_i с π угол между любым звеном ломаной L и горизонталью может принимать лишь значения вида $\varphi+(m/l)\pi$, где l — наименьшее общее кратное чисел $l_1, \dots, l_n$, целое число m зависит от рассматриваемого звена, а φ — постоянно вдоль траектории и удовлетворяет условию $0\leqslant\varphi<\pi/l$. Очевидно, φ — инвариантная ф-ция, не являющаяся константой, а потому биллиард не эргодичен (тем не менее для каждой его траектории, кроме нек-рого множества нулевой меры, соответствующая ломаная L всюду плотна в Q).

Ещё «менее эргодичен» биллиард в выпуклой области с достаточно гладкой границей (простейшие примеры — круг и эллипс). У такого биллиарда всегда существуют *каустики* — гладкие кривые γ, лежащие в Q и обладающие по отношению к любой из траекторий (точнее, к любой из их проекций) L тем свойством, что либо L и γ не имеют общих точек, либо каждое звено ломаной L касается γ. Для биллиарда в круге каустики — концентрич. окружность (рис. 5), для биллиарда в эллипсе — софокусные эллипсы и гиперболы.

Рис. 5. Окружность — каустика биллиардной траектории в круге.

Наиб. содержательна Э. т. рассеивающих биллиардов (биллиардов Синая). У такого биллиарда граница состоит из конечного числа гладких кривых или многообразий большей размерности, строго выпуклых внутрь области Q (рис. 6). Эта граница, взятая в качестве зеркала, рассеивает (делает расходящимся) узкий параллельный пучок света, падающий на неё из Q. Рассеивающие биллиарды относятся к классу гиперболич. ДС с особенностями: преобразования, из к-рых состоит система, теряют свойство гладкости (и даже непрерывности) в нек-рых точках фазового пространства (при отражении от границы направление вектора скорости меняется скачком). Теория таких биллиардов во многом аналогична теории гладких гиперболич. систем, хотя и сложнее в техн. отношении. Она приводит к выводу, что рассеивающий биллиард является К- и даже Б-системой. Следовательно, он обладает всеми стохастич. свойствами, характерными для таких систем. К-свойство обнаружено и у биллиардов в нек-рых областях, граница к-рых имеет как рассеивающие, так и фокусирующие и даже только одни фокусирующие участки. Примеры таких областей представлены на рис. 7. Среди них есть и выпуклые, но общей чертой всех границ является малая гладкость (по крайней мере, отсутствие второй производной).

Рис. 6. Рассеивающий биллиард: параллельный пучок после отражения становится расходящимся.



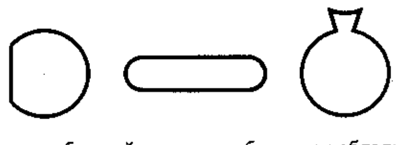


Рис. 7. Примеры областей, в которых биллиард обладает К-свойством, хотя и не является рассеивающим.

Наряду с рассеивающими рассматриваются полурассеивающие биллиарды. У них граница ∂Q имеет размерность $\geqslant 2$ и состоит из гладких кусков D_i, выпуклых, но не обязательно строго выпуклых внутрь Q: если пересечь D_i к.-н. плоскостью П, проходящей через точку $x\in D_i$, то для одних П получится выпуклая кривая, а для других — отрезок прямой (пример такого D_i — боковая поверхность кругового цилиндра). Интерес к полурассеивающим биллиардам в значит. мере объясняется тем, что к ним сводится задача об эргодич. свойствах системы n упругих шаров в прямоугольном ящике, к-рая решена лишь при $n\leqslant 4$.

Обнаружение стохастичности у биллиардных и подобных им систем опровергло существовавшее долгое время убеждение, что у ДС механич. происхождения такие свойства могут наблюдаться лишь при большом числе степеней свободы.