рий, можно выбрать едиными для всех точек фазового пространства.

Простейший пример системы Аносова — автоморфизм двумерного тора, отвечающий матрице $A=\begin{pmatrix}2&1\\1&1\end{pmatrix}$. Собств. числа этой матрицы равны соответственно $\lambda_1=(3-\sqrt{5})/2<1$ и $\lambda_2=1/\lambda_1$, а собств. направления определяются взаимно перпендикулярными векторами $e_1=(2, \sqrt{5}-1)$ и $e_2=(2, -\sqrt{5}-1)$. Устойчивое и неустойчивое многообразия произвольной точки x — это траектории обмотки, проходящие через x в направлении соответственно e_1 и e_2 (рис. 4). Каждая из этих кривых всюду

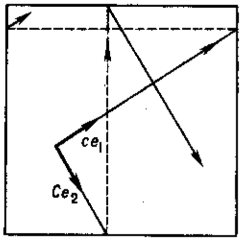

Рис. 4. Векторы, пропорциональные e_1 и e_2, и отрезки проходящих через них траекторий обмотки.

плотна на торе, что типично для систем Аносова, а их взаимная перпендикулярность — случайное обстоятельство, связанное с симметричностью матрицы A. В случае матрицы A произвольного порядка n (с целочисленными элементами и определителем ± 1) соответствующий автоморфизм n-мерного тора является системой Аносова в том и только том случае, когда у неё нет собственных чисел, лежащих на единичной окружности.

Самый известный пример системы Аносова с непрерывным временем — геодезич. поток на компактной поверхности M постоянной отрицат. *кривизны*. Фазовое пространство этой ДС образовано всеми касательными к M векторами длины 1, каждый из к-рых движется с единичной скоростью вдоль определяемой им *геодезической линии*. К геодезич. потоку приводится гамильтонова система с гамильтонианом $H=T+V$, если T квадратично зависит от импульсов, а V зависит только от координат. Соответствующая риманова метрика определяется гамильтонианом, но отрицательная кривизна появляется лишь при H спец. вида.

Системы Аносова демонстрируют простейший, идеальный тип гиперболич. поведения и редко встречаются в приложениях. Гораздо чаще условия гиперболичности выполняются лишь для траекторий, заполняющих нек-рое инвариантное множество, не совпадающее со всем фазовым пространством. При этом, в зависимости от того, существуют ли точки нейтрального типа и равномерна ли экспоненциальная скорость сближения траекторий в определении гиперболичности, различают полную и частичную, а также равномерную и неравномерную гиперболичности (здесь возможны любые комбинации). Полная и частичная гиперболичности выражаются в терминах характеристич. показателей: грубо говоря, первое свойство — это отсутствие нулевых, а второе — наличие ненулевых показателей.

Как правило, гиперболич. множество имеет нулевой риманов объём и вследствие этого нигде не плотно, т. е. не содержит ни одного шара (в двумерном случае — круга). Тривиальный пример такого множества — гиперболич. неподвижная точка x (седло) нек-рого гладкого преобразования плоскости. В её окрестности, однако, может существовать гиперболич. множество гораздо более сложной структуры (оно замкнуто, нигде не плотно и не содержит изолиров. точек, т. е. напоминает канторово совершенное множество). Это бывает в тех случаях, когда проходящие через точку x сепаратрисы (к-рые служат для неё устойчивым и неустойчивым многообразиями) пересекаются под ненулевым углом (трансверсально) в нек-рой точке $y\neq x$ (называемой трансверсальной гомоклинич. точкой).

Если гиперболич. множество Γ одновременно является аттрактором, т. е. притягивает при $t\to\infty$ все траектории из нек-рой своей окрестности, то оно должно содержать неустойчивое многообразие каждой своей точки. Т. о., в двумерном случае гиперболич. аттрактор локально представляет собой семейство более или менее параллельных друг другу кривых, проведённых через каждую точку нек-рого множества канторовского типа, лежащего на прямой, перпендикулярной направлению кривых. Аттракторы такого типа получили наименование *странных аттракторов*. Аналогичную структуру имеют гиперболич. аттракторы в многомерном случае. Один из наиб. известных примеров гиперболич. аттрактора — аттрактор Лоренца (см. *Лоренца система*).

Естеств. кандидат на роль инвариантной меры гиперболич. системы — это риманов объём (соответствующим образом нормированный). Однако он инвариантен лишь в нек-рых, весьма спец. ситуациях (напр., для автоморфизмов тора). Если же риманов объём ρ не инвариантен, а ДС представляет собой каскад Аносова, то она диссипативна относительно ρ: существует множество, образы к-рого под действием T^t при разных t попарно не пересекаются и покрывают всё фазовое пространство. Тем не менее из ρ можно получить инвариантную меру. Для этого нужно, начав с любой абсолютно непрерывной вероятностной меры μ (т. е. меры задаваемой плотностью относительно ρ), ввести последовательность мер μ_n, где

$$\mu_n(A)=\mu(T^{-n}A), \quad n\in\mathbb{Z}.$$

В случае системы Аносова, обладающей хотя бы одной всюду плотной траекторией (это свойство наз. топологической транзитивностью), последовательность μ_n слабо сходится при $n\to+\infty$ и $n\to-\infty$ к инвариантным мерам μ^+ и μ^- соответственно (слабая сходимость $\mu_n\to\nu$ означает, что $\int f d\mu_n\to\int f d\nu$ для любой ограниченной непрерывной ф-ции f). Меры μ^+ и μ^- не зависят от μ и, как правило, различны.

В более общем случае, когда система обладает гиперболич. аттрактором Γ, а μ — вероятностная мера, сосредоточенная в его окрестности и имеющая плотность относительно ρ, последовательность μ_n при $n\to+\infty$ слабо сходится к инвариантной мере, сосредоточенной на Γ. При нек-рых более общих условиях к инвариантной мере сходятся лишь средние арифметические $(1/n)\sum_{i=0}^{n-1}\mu_i$.

Роль устойчивых и неустойчивых многообразий в изучении эргодич. свойств гиперболич. систем иллюстрирует следующее рассуждение Э. Хопфа (E. Hopf). Если две точки лежат на одном устойчивом многообразии, то при $t\to\infty$ они сближаются, а потому для любой непрерывной ф-ции f её временно́е среднее f^* принимает одинаковые значения в тех точках этого многообразия, где ф-ция f^* определена. То же самое верно при $t\to-\infty$ для точек любого неустойчивого многообразия, а т. к. по теореме Биркгофа f^* существует на множестве полной меры, найдётся такая ф-ция $\tilde{f}$, постоянная на каждом $W^s(x)$ и на каждом $W^u(x)$, что $\tilde{f}=f^*$ всюду, кроме, быть может, множества нулевой меры. Очевидно, $\tilde{f}\equiv\mathrm{const}$, если выполняется следующее условие связности: для любых точек x, x' можно подобрать цепочку точек $y_0, y_1, \dots, y_n$, в к-рой $y_0=x$, $y_n=x'$, и при любом $k<n$ точки y_k и y_{k+1} принадлежат либо одному устойчивому, либо одному неустойчивому многообразию. Пользуясь тем, что всякая интегрируемая ф-ция приближается непрерывными ф-циями, можно распространить утверждение о постоянстве (почти всюду) средних f^* на все интегрируемые ф-ции f и тем самым доказать эргодичность.

В целом гиперболич. системы можно считать, хотя и с нек-рыми оговорками, в высокой степени стохастичными. Так, известно, что если каскад $\{T^t\}$ обладает гиперболич. множеством Γ с достаточно естеств. свойствами, то для широкого класса инвариантных мер, сосредоточенных на Γ, он эргодичен, но может иметь в спектре дискретную компоненту, препятствующую перемешиванию. В последнем случае Γ можно разбить на части $\Gamma_0, \Gamma_1, \dots, \Gamma_{k-1}$, циклически переставляемые отображением T^1, причём