$f_1, f_2, \ldots$, что меры μ_{f_i} абсолютно непрерывны относительно друг друга, подпространства $H(f_i)$ попарно ортогональны, а их сумма есть всё L_0^2, то спектр называется однородным. Число элементов последовательности $f_1, f_2, \ldots$ наз. кратностью спектра. Если при этом все σ_{f_i} эквивалентны мере Лебега, то спектр наз. лебеговским.

Обладая свойствами, общими для всех групп унитарных операторов, спектр ДС имеет и нек-рую специфику, связанную с тем, что операторы U^t не только линейны, но и мультипликативны: $U^t fg = U^t f U^t g$. В частности, собств. значения каждого из них образуют подгруппу группы комплексных чисел, равных по модулю единице.

Однако полное описание всех видов спектра, к-рый может встретиться у ДС, до сих пор отсутствует. Неизвестно, напр., может ли спектр быть конечнократным лебеговским.

Свойства ДС, к-рые можно выразить в терминах спектра, наз. спектральными и служат предметом спектрального направления Э. т. Так, эргодичность каскада $\{T^t\}$ равносильна отсутствию у оператора U^1 к.-л. собственных ф-ций с собственным значением «единица», кроме постоянных; все другие собственные подпространства этого оператора в эргодич. случае также одномерны и состоят из постоянных по модулю ф-ций. Слабое перемешивание — это отсутствие собств. значений, отличных от единицы: в этом случае говорят, что система имеет непрерывный спектр. Перемешивание также является спектральным свойством. Однако для К-свойства это уже неверно. Все К-системы имеют один и тот же — счётнократный лебеговский спектр, но известны ДС с таким же спектром, не являющиеся К-системами. Для систем с дискретным спектром (когда собств. ф-ции образуют базис в L^2) ситуация обратная: всякая такая система однозначно (с точностью до изоморфизма) определяется своим спектром (фон Нейман, 1932). Пример системы с дискретным спектром — семейство сдвигов на торе.

В исследованиях (прежде всего численных) конкретных ДС большую роль играет вычисление корреляционных ф-ций $K_f(t)$ и отвечающих им спектральных мер σ_f. В то же время полное аналитич. исследование спектра во мн. случаях является трудной задачей.

Энтропийная теория динамических систем

Это направление Э. т. возникло в кон. 50-х — нач. 60-х гг. после того, как А. Н. Колмогоровым было введено понятие энтропии ДС, близкое к теоретико-информац. энтропии К. Э. Шеннона (C. E. Shannon) (см. *Теория информации*). Пусть измеримые множества $A_1, \ldots, A_k$ образуют разбиение α вероятностного пространства $(X, \mathscr{A}, \mu)$. Энтропией этого разбиения наз. число

$$H(\alpha) = -\sum_{i=1}^{k} \mu(A_i) \log \mu(A_i),$$

полагая здесь $0 \log 0 = 0$ (основание логарифмов существенной роли не играет, но во многих случаях логарифмы удобно считать натуральными). Очевидно, $H(\alpha)$ не зависит от того, в каком порядке занумерованы множества A_i. Если T — сохраняющее меру преобразование, то при любом $m > 0$ множества $T^{-m} A_i$, $1 \leqslant i \leqslant k$, также образуют разбиение (обозначаемое $T^{-m}\alpha$). Доказывается, что всегда существует конечный предел

$$h(T, \alpha) = \lim_{n \to \infty} n^{-1} H(\alpha T^{-1} \alpha \ldots T^{-n+1} \alpha),$$

где $\alpha T^{-1} \alpha \ldots T^{-n+1} \alpha$ — разбиение, образованное всеми множествами вида $A_{i_0} \cap T^{-1} A_{i_1} \cap \ldots \cap T^{-n+1} A_{i_{n-1}}$ (нек-рые из них могут оказаться пустыми). По определению, энтропия $h(T)$ преобразования T, часто называемая энтропией Колмогорова — Синая, есть $\sup h(T, \alpha)$ по всем конечным разбиениям α. Т. к. каскад (или полукаскад) $\{T^t\}$ полностью определяется преобразованием T^1, его энтропию отождествляют с $h(T^1)$. Энтропия потока (или полупотока) также отождествляется с $h(T^1)$, что оправдывается тождеством $h(T^t) = |t| h(T^1)$ (справедливым и для дискретного времени).

Энтропия ДС может принимать любые неотрицат. значения, включая значение ∞. Изоморфные ДС имеют одинаковую энтропию.

Наглядное представление о смысле понятия энтропии (допускающее для нек-рых классов ДС строгое обоснование) можно получить следующим образом. Пусть $\{T^t\}$ — эргодич. каскад, фазовым пространством к-рого служит двумерная область, а инвариантной мерой μ — площадь (мера Лебега). Применив преобразование T^t к кружку B малого радиуса ε, получим множество $T^t B$ той же площади, но, возможно, др. формы. Если энтропия положительна, то граница области $T^t B$ с ростом t будет становиться всё более извилистой, нерегулярной. Величину этой нерегулярности можно измерить площадью ε-окрестности множества $T^t B$: при не очень больших t (порядка $|\ln \varepsilon|$ она увеличится по сравнению с площадью B примерно в $\exp(ht)$ раз, где h — энтропия каскада. При $h = 0$ эта площадь растёт медленнее, чем экспоненциально, или не растёт совсем. В неэргодич. случае фазовое пространство разбивается на инвариантные части $A_1, \ldots, A_n$, в каждой из к-рых может быть свой показатель скорости, а энтропия получается усреднением этих показателей с весами $\mu(A_i)$, $i = 1, \ldots, n$. Отсюда видно, что энтропия характеризует скорость искажения границ малых областей правильной формы, а положительность энтропии означает, что в какой-то части фазового пространства эта скорость экспоненциальна. Родственное свойство ДС — перемешивание. Но оно, во-первых, касается всего фазового пространства, во-вторых, может иметь любую скорость. Т. о., эти два свойства до нек-рой степени независимы. Тем не менее известно, что у всякой системы с положит. энтропией найдётся перемешивающая факторсистема (см. ниже).

Осн. задачи, решаемые энтропийной теорией,— вычисление (оценка) энтропии для тех или иных классов систем и выяснение взаимоотношений между энтропией и др. характеристиками ДС. Для сдвига в пространстве реализаций последовательности независимых, одинаково распределённых случайных величин ξ_n (Б-сдвига) энтропия равна $H(\xi_1)$. В классе Б-каскадов и Б-потоков энтропия играет определяющую роль, являясь полным инвариантом: две такие ДС изоморфны, если они имеют одинаковую энтропию (теорема Орнстейна; D. Ornstein, 1970). Для класса К-систем (включающего Б-системы в качестве подкласса) это уже не так: существует несчётное семейство попарно неизоморфных К-систем с одинаковой энтропией (правда, все известные К-системы физ. происхождения являются Б-системами). Но и с К-системами энтропия связана самым непосредств. образом, т. к. К-системы и только они имеют вполне положит. энтропию: любая нетривиальная факторсистема такой системы имеет положит. энтропию (теорема Рохлина — Синая; В. А. Рохлин, Я. Г. Синай, 1961). Тем самым у К-свойства имеется чисто энтропийный эквивалент.

К-системы входят в класс ДС с положит. энтропией. В нём уже встречаются системы, к-рые не перемешивают, и даже неэргодич. системы. Однако у любой эргодич. системы из этого класса, имеющей энтропию $h > 0$, найдётся факторсистема с любой наперёд заданной энтропией $h_1 \leqslant h$, к-рая является Б-системой (теорема Синая, 1962).

С точки зрения энтропийной теории противоположными К-системам свойствами обладают системы с нулевой энтропией, для них энтропийная теория гораздо менее содержательна, чем для систем с положит. энтропией. В то же время систем с нулевой энтропией достаточно много (в нек-ром точно формулируемом смысле они составляют подавляющее большинство среди всех ДС). К этому классу относятся все системы с дискретным спектром, но в нём встречаются перемешивающие системы и даже системы с таким же, как у К-систем, счётнократным лебеговским спектром.

Для гладких ДС известна связь между энтропией h и характеристич. показателями $\chi_i(x)$: