аризов. системы. В этом случае характеристич. показатели $\chi_i(x)$ (называемые также показателями Ляпунова) непосредственно связаны с характером устойчивости траекторий (*устойчивости движения*): если вектор u определяется точкой x и бесконечно близкой к ней точкой x', то положительность χ_i означает, что под действием T^t точки x и x' при $t\to\infty$ удаляются друг от друга с экспоненциальной скоростью, а отрицательность показателя говорит об их экспоненциальном сближении (о связи показателей Ляпунова с энтропией см. ниже).

Э. т. и теория вероятностей

Связь между этими двумя областями можно описать след. образом. Всякий стационарный в узком смысле случайный процесс (см. *Стационарный случайный процесс*) индуцирует в пространстве своих реализаций [т. е. функций $x(s)$ временнóго параметра s] вероятностную меру, инвариантную относительно сдвига S^t, определяемого при каждом t соотношением $(S^t x)(s)=x(s+t)$. Семейство сдвигов $\{S^t\}$ задаёт ДС. Если множество значений процесса конечно или счётно, такая система наз. символической (обычно этот термин употребляется в случае дискретного времени; см. ниже). Возможен и обратный переход от произвольной ДС к стационарному случайному процессу. Действительно, ДС $\{T^t\}$ с фазовым пространством $(X, \mathscr{A}, \mu)$ и произвольная измеримая функция f, определённая на X, порождают систему ф-ций $\{f_t\}$, где $f_t(x)=f(T^t x)$, $x\in X$, к-рая представляет собой стационарный в узком смысле случайный процесс. Семейство сдвигов $\{S^t\}$ в пространстве реализаций этого процесса задаёт символич. ДС, называемую факторсистемой ДС $\{T^t\}$. Переход к факторсистеме можно рассматривать как нек-рое огрубление детальной картины движения, приводящее, вообще говоря, к потере информации. Совокупность факторсистем полностью характеризует систему $\{T^t\}$. В эргодич. случае всегда существует такая ф-ция f, принимающая лишь конечное или счётное число значений, что построенная по ней факторсистема изоморфна исходной ДС. Следовательно, для этой факторсистемы потери информации не происходит и она одна полностью характеризует систему $\{T^t\}$. Раздел теории вероятностей, занимающийся стационарными в узком смысле случайными процессами, является одновременно и частью Э. т. Имеются, однако, нек-рые различия в подходе этих двух теорий к их общему предмету исследования: теория вероятностей в большей степени интересуется свойствами индивидуального процесса, а Э. т.— общими свойствами процессов, получаемых из данной ДС.

Стохастичность динамических систем

Статистич. закономерности в поведении ДС проявляются при их наблюдении на больших интервалах времени. Уже одно наличие инвариантной меры μ служит причиной нек-рых из этих закономерностей. Так, траектории μ-почти всех точек произвольного измеримого множества возвращаются в это множество при как угодно больших значениях t (*Пуанкаре теорема*). Разные точки могут возвращаться в разные моменты времени, а ср. время до первого возвращения в множество A обратно пропорционально $\mu(A)$ и, следовательно, очень велико для множеств малой меры. Этот факт придаёт строгость объяснению известного парадокса Э. Цермело, данному Больцманом в кон. 19 в. в ходе возникшей тогда дискуссии о необратимости в статистич. физике.

Другое следствие инвариантности меры — существование для любого измеримого множеств A асимптотич. частоты его посещения типичной траекторией динамич. системы. Эта частота есть временнóе среднее индикатора множества A, в эргодич. случае она равна $\mu(A)$.

Эргодичность каскада (или полукаскада) $\{T^t\}$ равносильна справедливости для любых ф-ций f, $g\in L^2$ соотношения

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\sum_{s=0}^{t-1}\left(\int\limits_X f(x)g(T^s x)\mu(dx)-\int\limits_X f(x)\mu(dx)\int\limits_X g(x)\mu(dx)\right)=0, \qquad (2)$$

к-рое означает, что предельное временнóе среднее взаимной ковариационной функции стационарных процессов f_t и g_t, полученных из ф-ций f и g с помощью ДС, равно нулю (в случае потока эта интерпретация сохраняется). Замена в (2) ковариационной ф-ции её абс. величиной приводит к свойству более сильному, чем эргодичность,— слабому перемешиванию. Ещё более сильное свойство — стремление к нулю при $t\to\infty$ самóй взаимной ковариационной ф-ции, т. е. равенство

$$\lim_{t\to 0}\left(\int\limits_X f(x)g(T^t x)\mu(dx)-\int\limits_X f(x)\mu(dx)\int\limits_X g(x)\mu(dx)\right)=0 \qquad (3)$$

(если t принимает и отрицат. значения, то можно заменить t на $-t$). ДС со свойством (3) наз. перемешивающими (см. также *Размешивание*). Представив фазовое пространство X в виде ограниченной части плоскости с обычной площадью (мерой Лебега) в роли инвариантной меры μ, можно получить следующее наглядное представление об эволюции множеств под действием перемешивающей ДС. Разобьём X на конечное число областей A_1, A_2, ..., A_k, диаметры к-рых не превосходят нек-рого достаточно малого $\varepsilon>0$, и возьмём в качестве g в (3) индикатор произвольного множества B, напр. кружка, изображённого на рис. 3, а в качестве f будем последовательно брать ин-

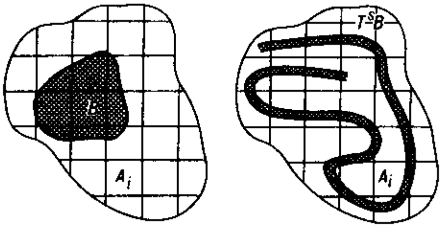

Рис. 3. Под действием перемешивающей системы образ множества B (т. е. T^sB) с течением времени всё более равномерно заполняет фазовое пространство.

дикаторы множеств A_1, ..., A_k. Тогда (3) при $s=-t>0$ примет вид

$$\lim_{s\to\infty}\frac{\mu(A_i\cap T^s B)}{\mu(A_i)}=\mu(B),\ i=1, ..., k.$$

Отсюда видно, что при больших s точки множества T^sB занимают почти одну и ту же долю площади каждого A_i. Поэтому можно сказать, что множество T^sB при $s\to\infty$ равномерно распределяется по ячейкам A_i или что с точностью до ε оно равномерно распределяется по пространству X. Конечно, момент времени, начиная с к-рого достигается заданная степень равномерности, может неограниченно расти с уменьшением ε. При этом надо учесть, что площадь T^sB не зависит от s и равна площади B. Следовательно, T^sB должно иметь весьма причудливую форму, напр. (в простейшем варианте) быть похожим на узкую, длинную и извилистую полоску, с ростом s всё более и более равномерно распределяющуюся по фазовому пространству.

Для перемешивающих ДС имеет место сходимость к «равновесию» нек-рых «неравновесных» мер, определённых на фазовом пространстве. Речь идёт о мерах ν, к-рые можно задать плотностью относительно инвариантной меры μ. Преобразование T^t, применённое к мере ν, превращает её в меру ν_t, определяемую соотношением $\nu_t(A)=\nu(T^{-t}A)$, $A\in\mathscr{A}$. Если система перемешивает, то $\nu_t(A)\to\mu(A)$ при $t\to\infty$ для любого $A\in\mathscr{A}$, т. е. под действием динамики любая мера из указанного класса сходится к инвариантной мере μ.