ф-ция $\operatorname{sn} x$ — двоякопериодическая. Её второй основной период равен $2iK'$, где

$$K'=\int\limits_0^1 \frac{d\tau}{\sqrt{(1-\tau^2)\left[1-(k'\tau)^2\right]}}$$

и $k'=\sqrt{1-k^2}$ — дополнит. модуль.

Э. ф. Вейерштрасса (пэ-функция) $u=\wp(x)$ может быть определена как обратная интегралу

$$x=\int\limits_\infty^u \frac{d\tau}{\sqrt{4\tau^3-g_2\tau-g_3}} \tag{2}$$

(g_2 и g_3 наз. инвариантами). При этом предполагается, что нули e_1, e_2 и e_3 многочлена $4\tau^3-g_2\tau-g_3$ различны между собой [в противном случае интеграл (2) выражался бы через элементарные ф-ции]. Если, в частности, числа e_1, e_2, e_3 вещественны и различны [это будет при условии, что g_2 и g_3 — вещественные числа и $\Delta=(1/16)(g_2^3-27g_3^2)>0$], причём $e_1>e_2>e_3$, то

$$2\omega_1=\int\limits_{e_1}^{\infty} \frac{d\tau}{\sqrt{(\tau-e_1)(\tau-e_2)(\tau-e_3)}}$$

и

$$2\omega_3=i\int\limits_{-\infty}^{e_3} \frac{d\tau}{\sqrt{(e_1-\tau)(e_2-\tau)(e_3-\tau)}}$$

будут основными периодами Э. ф. $\wp(z)$. Эта ф-ция принимает тогда действительные значения не только при $z=x$, но и при $z=\omega_1+iy$, $z=x+i\omega_3$ и $z=iy$; на рис. 2 представлены соответствующие графики. Если z описывает прямоугольник $0<x<\omega_1$, $0<y<\omega_3/i$, то $w=\wp(z)$ описывает нижнюю полуплоскость, причём соответствие между z и w является взаимно однозначным и конформным. С $\operatorname{sn}(z;\,k)$ ф-ция $\wp(z)$ связана зависимостью

$$\frac{\sqrt{e_1-e_3}}{\sqrt{\wp(z)-e_3}}=\operatorname{sn}\left(\sqrt{e_1-e_3};\quad \sqrt{\frac{e_2-e_3}{e_1-e_3}}\right).$$

Общие свойства эллиптич. функций. Э. ф. — любая мероморфная (см. в ст. *Аналитическая функция*) двоякопериодич. ф-ция $f(z)$. Пусть $2\omega_1$ и $2\omega_3$ (отношение $\omega_3{:}\omega_1$ мнимое) — основные периоды ф-ции $f(z)$, тогда $f(z+2\omega_1 m+2\omega_3 n)=f(z)$ при $m,\,n=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \ldots$. В силу этого достаточно изучить $f(z)$ в каком-либо параллелограмме её периодов $\boldsymbol{P}$ (рис. 3); к $\boldsymbol{P}$ кроме его внутр. точек причисляются точки сторон OA и OB, исключая вершины A и B. Имеют место след. теоремы Лиувилля: сумма, разность, произведение и частное Э. ф. есть Э. ф.; производная Э. ф. есть Э. ф.; если Э. ф. $\not\equiv$ const, то число N полюсов в $\boldsymbol{P}$ (с учётом кратности полюсов) $\geqslant 2$; ур-ние $f(z)=a$ при любом a имеет N корней в $\boldsymbol{P}$; суммы корней для двух разных a могут различаться только на нек-рый период $\Omega=2\omega_1 m+2n\omega_3$. Построим функции:

$$\sigma(z)=z\prod{}'\left(1-\frac{z}{\Omega}\right)\exp\left(\frac{z}{\Omega}+\frac{z^2}{2\Omega^2}\right),$$

$$\zeta(z)=\frac{\sigma'(z)}{\sigma(z)}=\frac{1}{z}+\sum{}'\left(\frac{1}{z-\Omega}+\frac{1}{\Omega}+\frac{z}{\Omega^2}\right),$$

$$\wp(z)=-\zeta'(z)=\frac{1}{z^2}+\sum{}'\left[\frac{1}{(z-\Omega)^2}-\frac{1}{\Omega^2}\right],$$

где $\prod'$ и $\sum'$ — знаки произведения и суммы, распространённые на все периоды $\Omega\neq0$. Функция $\sigma(z)$ — простейшая целая функция, имеющая нули 1-го порядка во всех точках Ω (т. н. сигма-функция), $\zeta(z)$ и $\wp(z)$ — простейшие мероморфные функции, имеющие полюсы в Ω соответственно 1-го и 2-го порядков. Пусть $\alpha_1,\ \ldots,\ \alpha_N$ и $\beta_1,\ \ldots,\ \beta_N$ — нули и полюсы Э. ф. $f(z)$, принадлежащие $\boldsymbol{P}$ (кратные нули и полюсы выписываются столько раз, какова их кратность), тогда $f(z)$ имеет вид

$$f(z)=C_0\frac{\sigma(z-\alpha_1)\ \ldots\ \sigma(z-\alpha_N)}{\sigma(z-\beta_1)\ \ldots\ \sigma(z-\beta'_N)}, \tag{3}$$

где C_0 постоянная и $\beta'_N=(\alpha_1+\ldots+\alpha_N)-(\beta_1+\ldots+\beta_{N-1})$. Если $b_1,\ \ldots,\ b_n$ — различные между собой полюсы $f(z)$ и $\varkappa_1,\ \ldots,\ \varkappa_n$ — их порядки ($\varkappa_1+\ldots+\varkappa_n=N$), причём главная часть разложения $f(z)$ в окрестности b_k есть

$$\frac{A^{(k)}}{z-b_k}+\ldots+\frac{A^{(k)}}{(z-b_k)^{\varkappa_k}},$$

то

$$f(z)=C+\sum_{k=1}^{n}\left\{A^{(k)}\zeta(z-b_k)-\frac{A_2^{(k)}}{2!}\zeta'(z-b_k)+\right.$$
$$\left.+\ldots+(-1)^{\varkappa_k-1}\frac{A_{\varkappa_k}^{(k)}}{(\varkappa_k-1)!}\zeta^{\varkappa_k-1}(z-b_k)\right\}, \tag{4}$$

где C — постоянная; формулы (3) и (4), принадлежащие К. Вейерштрассу (K. Weierstraß), аналогичны формулам, представляющим рациональную функцию в виде частного двух произведений линейных множителей (многочленов) либо в виде суммы простейших дробей; на них основывается вся теория Э. ф.

К идее обращения эллиптич. интегралов впервые пришёл К. Гаусс (C. Gauss), получивший мн. результаты теории Э. ф. ещё в кон. 18 в. (1797 и последующие годы), но не публиковавший их. Фактически основателями Э. ф. являются Абель и Якоби. Последний дал развёрнутое изложение теории Э. ф., названных его именем (они были введены Абелем). В 1847 Ж. Лиувилль (J. Liouville) опубликовал изложение основ теории Э. ф., рассматриваемых как мероморфные двоякопериодич. функции; это изложение — пример применения к теории Э. ф. начал теории аналитич. функций комплексного переменного, развитых О. Коши (A. Cauchy).

Вейерштрасс пришёл к своим функциям $\sigma(z)$, $\zeta(z)$, $\wp(z)$, по-видимому, ещё в 40-х гг. 19 в. [аналогичные функции встречаются в работах Ф. Эйзенштейна (F. Eisenstein, 1847) и др. учёных]. Краткое изложение теории Э. ф. в обозначениях Вейерштрасса было опубликовано Г. Шварцем (H. Schwartz, 1883—84). Необходимо также отметить работы Ш. Эрмита (Ch. Hermit), получившего с помощью Э. ф. решение общего алгебраич. уравнения 5-й степени.

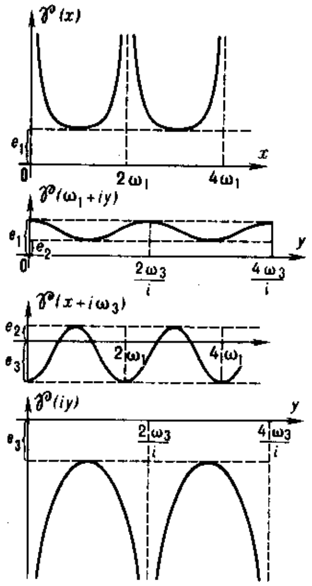

Рис. 2.

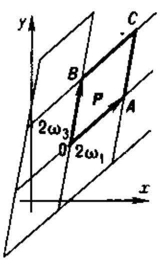

Рис. 3.

Лит.: Ахиезер Н. И., Элементы теории эллиптических функций, 2 изд., М., 1970; Гурвиц А., Курант Р., Теория функций, пер. с нем., М., 1968.

А. И. Маркушевич.