оборот, зная действующие на тело силы, определить закон его движения.

Лит.: Бухгольц Н. Н., Основной курс теоретической механики, 6 изд., ч. 2, М., 1972. *С. М. Тарг.*

ЭЙЛЕРА ЧИСЛÓ — один из *подобия критериев* движения жидкостей или газов. Характеризует соотношение между силами давления, действующими на элементарный объём жидкости или газа, и инерц. силами. Э. ч. $Eu=2(p_2-p_1)/\rho v^2$ (иногда $2p/\rho v^2$), где p_2, p_1 — давления в двух характерных точках потока (или движущегося в нём тела), $\rho v^2/2$ — скоростной напор, ρ — плотность жидкости или газа, v — скорость течения (или скорость тела). Если при течении жидкости имеет место *кавитация*, то аналогичный критерий наз. числом кавитации $\varkappa=2(p_0-p_н)/\rho v^2$, где p_0 — характерное давление, $p_н$ — давление насыщ. паров жидкости. В сжимаемых газовых потоках Э. ч. в форме $Eu=2p/\rho v^2$ связано с др. критериями подобия — *Маха числом* M и отношением уд. теплоёмкостей среды γ — ф-лой $Eu=2/\gamma M^2$, где $\gamma=c_p/c_V$ (c_p — уд. теплоёмкость при пост. давлении, c_V — уд. теплоёмкость при пост. объёме).

ЭЙЛЕРА — Д'АЛАМБÉРА ПАРАДÓКС — см. *Д'Аламбера — Эйлера парадокс.*

ЭЙЛЕРА — ЛАГРÁНЖА УРАВНÉНИЕ — необходимое условие экстремума в задачах *вариационного исчисления*, полученное Л. Эйлером в 1744. Впоследствии, используя другой метод, это ур-ние вывел Ж. Лагранж (J. Lagrange) в 1759.

Пусть поставлена задача вариац. исчисления, состоящая в определении экстремума функционала

$$J(x)=\int_{t_1}^{t_2}F(t,\,x,\,\dot x)\,dt \qquad (1)$$

при известных условиях на концах

$$x(t_1)=x_1,\quad x(t_2)=x_2. \qquad (2)$$

И пусть непрерывно дифференцируемая ф-ция $x(t)$, $t_1\leqslant t\leqslant t_2$, есть решение задачи (1), (2). Тогда $x(t)$ удовлетворяет Э.— Л. у.:

$$F_x-\frac{d}{dt}F_{\dot x}=0. \qquad (3)$$

Ур-ние (3) можно записать в развёрнутом виде:

$$F_x-F_{t\dot x}-F_{x\dot x}\dot x-F_{\dot x\dot x}\ddot x=0. \qquad (4)$$

Гладкое решение ур-ния (3) [или (4)] наз. экстремалью. Если $F_{\dot x\dot x}\neq 0$ в точке (t, x), лежащей на экстремали, то в этой точке экстремаль имеет непрерывную 2-ю производную $\ddot x$. Экстремаль, во всех точках к-рой $F_{\dot x\dot x}\neq 0$, наз. неособенной. Для неособенной экстремали Э.— Л. у. можно записать в виде, разрешённом относительно 2-й производной $\ddot x$.

Решение вариац. задачи (1), (2) необязательно должно быть непрерывно дифференцируемым. В общем случае оптимальное решение $x(t)$ может быть кусочно дифференцируемой ф-цией. Тогда в угл. точках $x(t)$ должны выполняться необходимые условия Вейерштрасса — Эрдмана, обеспечивающие непрерывность при переходе через угл. точку выражений $F_{\dot x}$ и $F-\dot xF_{\dot x}$, а на отрезках между соседними угл. точками ф-ция $x(t)$ должна удовлетворять Э.— Л. у. Кусочно гладкие линии, составленные из кусков экстремалей и удовлетворяющие в угл. точках условиям Вейерштрасса — Эрдмана, наз. ломаными экстремалями.

В общем случае дифференциальное Э.— Л. у. является ур-нием 2-го порядка и, следовательно, его общее решение зависит от двух произвольных постоянных c_1 и c_2:

$$x=f(t,\,c_1,\,c_2).$$

Эти произвольные постоянные можно определить из граничных условий (2):

$$\begin{cases} f(t_1,\,c_1,\,c_2)=x_1,\\ f(t_2,\,c_1,\,c_2)=x_2.\end{cases} \qquad (5)$$

Если рассматривается функционал, зависящий от неск. ф-ций,

$$J(x^1,\,\dots,\,x^n)=\int_{t_1}^{t_2}F(t,\,x^1,\,\dots,\,x^n,\,\dot x^1,\,\dots,\,\dot x^n)\,dt, \qquad (6)$$

то вместо одного Э.— Л. у. приходят к системе n Э.— Л. у.:

$$F_{x^i}-\frac{d}{dt}F_{\dot x^i}=0,\quad i=1,\,\dots,\,n. \qquad (7)$$

Общее решение системы (7) зависит от $2n$ произвольных постоянных, к-рые определяются из заданных $2n$ граничных условий (для задачи с закреплёнными концами).

В случае вариац. задач с подвижными концами, в к-рых левый и правый концы экстремали могут смещаться по нек-рым заданным гиперповерхностям, недостающие граничные условия, позволяющие получить замкнутую систему соотношений типа (5), определяются с помощью необходимого условия трансверсальности. Для простейшей задачи типа (1), в к-рой точка

$$(t_1,\,x(t_1),\,t_2,\,x(t_2))=(t_1,\,x_1,\,t_2,\,x_2)$$

не фиксируется, а может принадлежать нек-рому множеству, условие трансверсальности записывается в виде

$$\left[(F-\dot xF_{\dot x})dt+F_{\dot x}dx\right]_1^2=0; \qquad (8)$$

оно должно выполняться при любых значениях дифференциалов dt_1, dx_1, dt_2, dx_2, удовлетворяющих проварьированным граничным условиям. Если левый и правый концы экстремали могут смещаться вдоль заданных линий $x=\varphi_1(t)$ и $x=\varphi_2(t)$, то в силу условий

$$dx_1=\dot\varphi_1(t)dt_1,\quad dx_2=\dot\varphi_2(t)dt_2$$

и независимости вариаций dt_1 и dt_2 из (8) получают

$$\begin{cases} F(t_1,\,x_1,\,\dot x_1)+[\dot\varphi_1(t_1)-\dot x_1]\,F_{\dot x}(t_1,\,x_1,\,\dot x_1)=0,\\ F(t_2,\,x_2,\,\dot x_2)+[\dot\varphi_2(t_2)-\dot x_2]\,F_{\dot x}(t_2,\,x_2,\,\dot x_2)=0.\end{cases}$$

Если уравнения линий, вдоль к-рых смещаются левый и правый концы экстремали, заданы в неявном виде $\omega_1(t,\,x)=0$ и $\omega_2(t,\,x)=0$, то условие трансверсальности записывается так:

$$\begin{cases} \dfrac{F-\dot xF_{\dot x}}{\omega_{1t}}=\dfrac{F_{\dot x}}{\omega_{1x}} & \text{на левом конце,}\\[2mm] \dfrac{F-\dot xF_{\dot x}}{\omega_{2t}}=\dfrac{F_{\dot x}}{\omega_{2x}} & \text{на правом конце.}\end{cases}$$

Если на один из концов экстремали не наложено никаких ограничений, то на этом конце в силу независимости соответствующих концевых вариаций dt и dx условие трансверсальности принимает вид

$$F=0,\quad F_{\dot x}=0.$$

Для функционалов, содержащих производные высших порядков [а не только 1-го, как (1), (6)], необходимое условие, аналогичное Э.— Л. у., записывается в виде дифференц. ур-ния Эйлера — Пуассона (см. [1]).

Для вариац. задач, в к-рых разыскивается экстремум функционалов, зависящих от ф-ций неск. переменных, аналогичное необходимое условие записывается в виде ур-ния Эйлера — Остроградского, представляющего собой дифференц. ур-ние с частными производными (см. [2]).

В случае вариац. задач на условный экстремум получение системы Э.— Л. у. связано с использованием множителей Лагранжа. Напр., для т. н. задачи Больца, в к-рой требуется найти экстремум функционала, зависящего от n ф-ций $x=(x^1,\,\dots,\,x^n)$,

$$J(x)=\int_{t_1}^{t_2}f(t,\,x,\,\dot x)\,dt+g(t_1,\,x(t_1),\,t_2,\,x(t_2)) \qquad (9)$$