метрам, найти выражения для нек-рых осн. *аберраций оптических систем*. Ф-ции, наз. Э., широко используются в *электронной и ионной оптике* в рамках общей аналогии, существующей между нею и классич. оптикой, а также при описании процессов рассеяния частиц и волн в квантовой механике и квантовой теории поля (эйкональное приближение), где тоже возникают аналогии с оптикой.

Лит.: Борн М., Вольф Э., Основы оптики, пер. с англ., 2 изд., М., 1973.

ЭЙЛЕРА ИНТЕГРА́ЛЫ — интегралы вида

$$\Gamma(z)=\int_0^\infty e^{-t}t^{z-1}\,dt,\quad \operatorname{Re} z>0$$

— гамма-функция, или Э. и. второго рода [Л. Эйлер (L. Euler), 1729—30], и вида

$$B(u,\ v)=\int_0^1 t^{u-1}(1-t)^{v-1}dt,\quad \operatorname{Re} u>0,\quad \operatorname{Re} v>0$$

— бета-функция, или Э. и. первого рода [Л. Эйлер, 1730—31, ранее рассматривался также И. Ньютоном (I. Newton) и Дж. Уоллисом (Валлисом) (J. Wallis)].

В области определения $\Gamma(z)$ является *аналитической функцией*; $B(u,\ v)$ аналитична по каждому из аргументов. Э. и. связаны соотношением

$$B(u,\ v)=\frac{\Gamma(u)\Gamma(v)}{\Gamma(u+v)}. \qquad (*)$$

Ф-ция $\Gamma(z)$ может быть аналитически продолжена на всю плоскость, за исключением точек $z=-n$, $n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots$, где она имеет полюсы первого порядка с вычетами $(-1)^n/n!$. *Аналитическое продолжение* $B(u,\ v)$ может быть получено из (*).

Э. и. удовлетворяют, в частности, следующим функциональным соотношениям: $\Gamma(z+1)=z\Gamma(z)$, $\Gamma(z)\Gamma(1-z)=\pi/\sin\pi z$ (т. н. ф-ла дополнения), $2^{2z-1}\Gamma(z)\Gamma(z+1/2)=\Gamma(1/2)\Gamma(2z)$ (ф-ла удвоения), $B(z,\ 1)=1/z$, $B(z,\ 1-z)=\pi/\sin\pi z$, $2^{2z-1}B(z,\ z)=B(z,\ 1/2)$.

Частные значения: $\Gamma(n+1)=n!$ $\Gamma(1/2)=\sqrt{\pi}$, $\Gamma(n+1/2)=(\sqrt{\pi}/2^{2n})(2n)!/n!$, $B(m+1,\ n+1)=m!n!/(m+n+1)!$ $(m=0,\ 1,\ 2,\ \ldots)$, $B(1/2,\ n/2)=2(n-2)!!/(n-1)!!$ (при $n=2,\ 4,\ 6,\ \ldots$) и $B(1/2,\ n/2)=\pi(n-2)!!/(n-1)!!$ (при $n=1,\ 3,\ 5,\ \ldots$).

Для $|z|\gg 1$, $|\arg z|\leqslant\pi-\delta$, $\delta>0$ справедливо асимптотич. представление

$$\Gamma(z)=\exp\left[(z-1/2)\ln z-z+(1/2)\ln 2\pi\right]\times$$
$$\times\left[1+1/12z+1/288z^2-139/51840z^3+0(z^{-4})\right].$$

В приложениях часто используют т. н. формулу Стирлинга:

$$\Gamma(n+1)=n!\approx\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n.$$

Ф-цию $B(x,\ y)$ ($x,\ y$ — вещественные) можно представить в виде ряда

$$B(x,\ y)=\frac{1}{y}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{y(y-1)\ldots(y-n)}{n!(x+n)},\quad y>0.$$

Интегралы

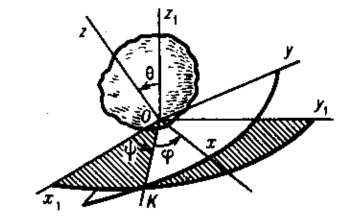
$$\Gamma(a,\ z)=\int_z^\infty e^{-t}t^{a-1}\,dt,$$

$$B_z(p,\ q)=\int_0^z t^{p-1}(1-t)^{q-1}\,dt$$

наз. соответственно неполной гамма-функцией и неполной бета-функцией (см. также *Интегральные функции*).

Лит.: Лебедев Н. Н., Специальные функции и их приложения, 2 изд., М.—Л., 1963; Никифоров А. Ф., Уваров В. Б., Специальные функции математической физики, 2 изд., М., 1984.

ЭЙЛЕРА УГЛЫ́ — три угла φ, ψ и θ, определяющие положение твёрдого тела, имеющего неподвижную точку O (напр., *гироскопа*), по отношению к неподвижным прямоуг. осям $Ox_1y_1z_1$. Если с телом жёстко связать прямоуг. оси $Oxyz$ (рис.) и обозначить линию пересечения плоскостей Ox_1y_1 и Oxy через OK (линия узлов), то Э. у. будут: угол собственного вращения $\varphi=\angle KOx$ (угол поворота вокруг оси Oz), угол прецессии $\psi=\angle x_1OK$ (угол поворота вокруг оси Oz_1) и угол нутации $\theta=\angle z_1Oz$ (угол поворота вокруг линии узлов OK); положит. направления отсчёта углов показаны на рисунке дуговыми стрелками. Положение тела будет определяться однозначно, если считать углы φ и ψ изменяющимися от 0 до 2π, а угол θ — от 0 до π. Э. у. широко пользуются в динамике твёрдого тела, в частности в теории гироскопа и в небесной механике.



ЭЙЛЕРА УРАВНЕ́НИЕ в гидромеханике — дифференц. ур-ние движения идеальной жидкости в переменных Эйлера. Если давление p, плотность ρ, проекции скоростей частиц жидкости $u,\ v,\ \omega$ и проекции действующей объёмной силы $X,\ Y,\ Z$ рассматривать как ф-ции координат $x,\ y,\ z$ точек пространства и времени t (переменные Эйлера), то Э. у. в проекциях на оси прямоуг. декартовой системы координат принимает вид системы ур-ний:

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}=X-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x},$$
$$\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+w\frac{\partial v}{\partial z}=Y-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y},$$
$$\frac{\partial w}{\partial t}+u\frac{\partial w}{\partial x}+v\frac{\partial w}{\partial y}+w\frac{\partial w}{\partial z}=Z-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}.$$

Решение общей задачи гидромеханики в переменных Эйлера сводится к тому, чтобы, зная $X,\ Y,\ Z$, а также начальные и граничные условия, определить $u,\ v,\ w,\ p,\ \rho$ как ф-ции $x,\ y,\ z$ и t. Для этого к Э. у. присоединяют ур-ние неразрывности в переменных Эйлера:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{\partial(\rho u)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho v)}{\partial y}+\frac{\partial(\rho w)}{\partial z}=0.$$

В случае баротропной жидкости, у к-рой плотность зависит только от давления, 5-м ур-нием будет ур-ние состояния $\rho=\varphi(p)$ (или $\rho=\mathrm{const}$, когда жидкость несжимаема).

Э. у. пользуются при решении разнообразных задач гидромеханики.

Лит.: Лойцянский Л. Г., Механика жидкости и газа, 6 изд., М., 1987. *С. М. Тарг.*

ЭЙЛЕРА УРАВНЕ́НИЯ в механике твердого тела.

Динамические Э. у. представляют собой дифференц. ур-ния движения твёрдого тела вокруг неподвижной точки и имеют вид

$$\begin{aligned} I_x\dot\omega_x+(I_z-I_y)w_yw_z&=M_x,\\ I_y\dot\omega_y+(I_x-I_z)w_zw_x&=M_y,\\ I_z\dot\omega_z+(I_y-I_x)w_xw_y&=M_z,\end{aligned}\qquad (1)$$

где $I_x,\ I_y,\ I_z$ — моменты инерции тела относительно гл. осей инерции, проведённых из неподвижной точки; $w_x,\ w_y,\ w_z$ — проекции мгновенной угл. скорости тела на эти оси; $M_x,\ M_y,\ M_z$ — гл. моменты сил, действующих на тело, относительно тех же осей; $\dot\omega_x,\ \dot\omega_y,\ \dot\omega_z$ — производные по времени от $\omega_x,\ \omega_y,\ \omega_z$.

Кинематические Э. у. дают выражения $\omega_x,\ \omega_y,\ \omega_z$ через *Эйлера углы* $\varphi,\ \psi,\ \theta$ и имеют вид

$$\begin{aligned}\omega_x&=\dot\psi\sin\theta\sin\varphi+\dot\theta\cos\varphi,\\ \omega_y&=\dot\psi\sin\theta\cos\varphi-\dot\theta\sin\varphi,\\ \omega_z&=\dot\varphi+\dot\psi\cos\theta.\end{aligned}\qquad (2)$$

Система ур-ний (1) и (2) позволяет, зная закон движения тела, определить момент действующих на него сил и на-