собств. ф-циям граничной задачи (2), (3) сходится при тех же условиях, что и разложение $f(x)$ в ряд Фурье по косинусам (см. [1], [4]).

2. Рассматривается дифференц. ур-ние (2) на полуоси $0 \leqslant x \leqslant \infty$ с граничным условием в нуле:

$$y'(0)-hy(0)=0. \tag{5}$$

Ф-ция $q(x)$ в (2) предполагается действительной и суммируемой в каждом конечном подынтервале интервала $[0, \infty)$, а число h действительным.

Пусть $\varphi(x, \lambda)$ — решение ур-ния (2) с нач. условиями $y(0)=1$, $y'(0)=h$ [так что $\varphi(x, \lambda)$ удовлетворяет и граничному условию (5)]. Пусть $f(x)$ — любая ф-ция из $L_2(0, \infty)$ и

$$\Phi_{f,b}(x)=\int_0^b f(x)\varphi(x, \lambda)\,dx,$$

где b — произвольное конечное положит. число. Для каждой ф-ции $q(x)$ и каждого числа h существует, по крайней мере, одна, не зависящая от $f(x)$, неубывающая ф-ция $\rho(\lambda)$, $-\infty<\lambda<\infty$, обладающая следующими свойствами:

а) существует ф-ция $\Phi_f(\lambda)$, являющаяся пределом $\Phi_{f,b}(\lambda)$ при $b\to\infty$ в метрике $\mathscr{L}_{2,\rho}(-\infty, \infty)$ [пространства ρ-измеримых ф-ций $\psi(\lambda)$, для к-рых

$$\|\psi(\lambda)\|^2=\int_{-\infty}^{\infty}|\psi(\lambda)|^2\,d\rho(\lambda)<\infty],$$

т. е.

$$\lim_{b\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}|\Phi_f(\lambda)-\Phi_{f,b}(\lambda)|^2\,d\rho(\lambda)=0;$$

б) имеет место равенство Парсеваля

$$\int_0^{\infty}|f(x)|^2\,dx=\int_{-\infty}^{\infty}|\Phi_f(\lambda)|^2\,d\rho(\lambda).$$

Ф-ция $\rho(\lambda)$ наз. **спектральной функцией** (**спектральной плотностью**) граничной задачи (2), (5) (см. [9]—[11]).

Для спектральной ф-ции $\rho(\lambda)$ задачи (2), (5) справедлива асимптотич. ф-ла (см. [16]; в уточнённом виде см. [17]):

$$\lim_{\lambda\to-\infty}e^{\sqrt{\lambda x}}[\rho(\lambda)-\rho(-\infty)]=0,\ 0\leqslant x<\infty,$$

$$\lim_{\lambda\to\infty}[\rho(\lambda)-\rho(-\infty)]-\frac{2}{\pi}\sqrt{\lambda}+h]=0.$$

Справедлива следующая теорема равносходимости: для произвольной ф-ции $f(x)\in L_2(0, \infty)$ пусть

$$\Phi_f(\lambda)=\int_0^{\infty}f(x)\varphi(x, \lambda)\,dx,$$

$$C_f(\lambda)=\int_0^{\infty}f(x)\cos\sqrt{\lambda}x\,dx$$

(интегралы сходятся в метриках пространств соответственно);

$$L_{2,\rho}(-\infty, \infty) \text{ и } L_{2,\sqrt{\lambda}}(0, \infty),$$

тогда при каждом фиксированном $b<\infty$ сходится интеграл

$$\int_{-\infty}^{0}\Phi_f(\lambda)\varphi(x, \lambda)\,d\rho(\lambda)$$

абсолютно и равномерно относительно $x\in[0, b]$ и

$$\lim_{N\to\infty}\sup_{0\leqslant x<b}\left|\int_{-\infty}^{N}\Phi_f(\lambda)\varphi(x, \lambda)\,d\rho(\lambda)-\right.$$

$$\left.-\frac{2}{\pi}\int_0^N C_f(\lambda)\cos\sqrt{\lambda}x\,d\sqrt{\lambda}\right|=0.$$

Пусть задача (2), (5) имеет дискретный спектр, т. е. её спектр состоит из счётного числа собств. значений λ_1, λ_2, ..., $<\lambda_n<$... с единственной предельной точкой в бесконечности. При определ. условиях на ф-цию $q(x)$ для ф-ции $N(\lambda)=\sum_{\lambda_n<\lambda}1$, т. е. числа́ собств. значений, меньших λ, справедлива асимптотич. ф-ла:

$$N(\lambda)\sim\frac{1}{2\pi}\int_{q(x)<\lambda}[\lambda-q(x)]^{1/2}\,dx.$$

Наряду с решением $\varphi(x, \lambda)$ вводится второе решение $\theta(x, \lambda)$ ур-ния (2), удовлетворяющее условиям $\theta(0, \lambda)=0$, $\theta'(0, \lambda)=1$, так что $\varphi(x, \lambda)$ и $\theta(x, \lambda)$ образуют фундам. систему решений ур-ния (2). При фиксир. числах λ ($\operatorname{Im}\lambda\neq0$) и $b>0$ рассматривается дробно-линейная ф-ция:

$$w_{\lambda,b}=w_{\lambda,b}(t)=\frac{-\theta'(b, \lambda)-t\theta(b, \lambda)}{\varphi'(b, \lambda)+t\varphi(b, \lambda)}.$$

Когда независимая переменная t пробегает действительную ось, точка $w_{\lambda,b}$ описывает нек-рую окружность, ограничивающую круг $K_{\lambda,b}$. Он всегда лежит в той же полуплоскости (нижней или верхней), что и λ. С увеличением b круг $K_{\lambda,b}$ сжимается, т. е. при $b<b'$ круг $K_{\lambda,b'}$ лежит целиком внутри круга $K_{\lambda,b}$. Существует (при $b\to\infty$) предельный круг или точка $K_{\lambda,\infty}$; при этом если

$$\int_0^{\infty}|\varphi(x, \lambda)|^2\,dx<\infty, \tag{6}$$

то $K_{\lambda,\infty}$ будет кругом, в противном случае — точкой (см. [10]). Если условие (6) выполняется для одного к.-л. недействит. значения λ, то оно выполняется для всех значений λ. В случае предельного круга для всех значений λ все решения ур-ния (2) принадлежат пространству $L_2(0, \infty)$, а в случае предельной точки для каждого недействит. значения λ это ур-ние имеет решение вида $\theta(x, \lambda)+m(\lambda)\varphi(x, \lambda)$, принадлежащее $L_2(0, \infty)$, где $m(\lambda)$ — предельная точка $[m(\lambda)=K_{\lambda,\infty}]$.

Если $q(x)\geqslant-cx^2$, где c — нек-рая положительная постоянная, то имеет место случай предельной точки (см. [19]); более общие результаты см. [20], [21]).

3. Рассматривается ур-ние (2) на всей оси $-\infty<x<\infty$ в предположении, что $q(x)$ — действительная суммируемая в каждом конечном подынтервале из $(-\infty, \infty)$ ф-ция. Пусть $\varphi_1(x, \lambda)$, $\varphi_2(x, \lambda)$ — решения ур-ния (2), удовлетворяющие условиям $\varphi_1(0, \lambda)=\varphi_2(0, \lambda)=1$, $\varphi_1'(0, \lambda)=\varphi_2'(0, \lambda)=0$.

Существует, по крайней мере, одна действительная симметрическая неубывающая матрица-функция

$$\mathscr{P}(\lambda)=\left\|\begin{matrix}\rho_{11}(\lambda) & \rho_{12}(\lambda)\\ \rho_{21}(\lambda) & \rho_{22}(\lambda)\end{matrix}\right\|,\quad -\infty<\lambda<\infty,$$

обладающая следующими свойствами:

а) для любой ф-ции $f(x)\in L_2(-\infty, \infty)$ существуют ф-ции $\Phi_{j,f}(\lambda)$, определённые равенствами

$$\Phi_{j,f}(\lambda)=\lim_{b\to\infty}\int_{-b}^{b}f(x)\varphi_j(x, \lambda)\,dx,\quad j=1, 2,$$

где предел — по метрике пространства $L_{2,\mathscr{P}}(-\infty, \infty)$;

б) имеет место равенство Парсеваля

$$\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|^2\,dx=\sum_{j,k=1}^{2}\int_{-\infty}^{\infty}\Phi_{j,f}(\lambda)\Phi_k(\lambda)\,d\rho_{jk}(\lambda).$$

Лит.: 1) Левитан Б. М., Саргсян И. С., Введение в спектральную теорию, М., 1970; 2) Левитан Б. М., Разложение по собственным функциям дифференциальных уравнений второго порядка, М.—Л., 1950; 3) его же, Теория операторов обобщенного