кает явное выражение через θ-функции Римана и наз. конечнозонным. При $L\to\infty$ конечнозонные решения Ш. у. н. переходят в N-солитонные.

Ш. у. н. можно рассматривать как гамильтоново ур-ние движения $\partial\psi/\partial t=\{H, \psi\}$ с гамильтонианом

$$H=\int dx\left(\left|\frac{\partial\psi}{\partial x}\right|^2+\varkappa|\psi|^4\right)$$

и скобкой Пуассона $\{\psi(x), \bar\psi(y)\}=i\delta(x-y)$. Координатами в фазовом пространстве являются ф-ции $\psi(x)$ и $\bar\psi(x)$ с определ. граничными условиями.

В рамках гамильтонова подхода к Ш. у. н. широкое распространение получил метод r-матрицы, первоначально возникший в теории квантового метода обратной задачи. В основе данного метода лежит возможность представить скобки Пуассона матричных элементов матрицы $U(x, y)$ в виде

$$\{U(x, \lambda)\otimes U(y, \mu)\}=[r(\lambda-\mu), U(x, \lambda)\otimes I+I\otimes U(x, \mu)]\delta(x-y),$$

где r-матрица равна

$$r(\lambda-\mu)=-\frac{\varkappa}{2(\lambda-\mu)}\sum_{a=0}^{3}\sigma_a\otimes\sigma_a.$$

Можно показать, что такая запись скобок Пуассона заменяет представление нулевой кривизны.

Скобки Пуассона матричных элементов матрицы монодромии также записываются с помощью r-матрицы:

$$\{T(\lambda)\otimes T(\mu)\}=[r(\lambda-\mu), T(\lambda)\otimes T(\mu)].$$

С точки зрения гамильтонова подхода переход к данным рассеяния является канонич. преобразованием к переменным действие — угол.

Гамильтонова модель Ш. у. н. является вполне интегрируемой и обладает бесконечным набором интегралов движения J_n, производящей ф-цией для к-рых является след матрицы монодромии $\operatorname{tr} T(\lambda)$. Все интегралы движения записываются в виде локальных функционалов от ψ и $\bar\psi$ и их производных, напр.:

$$J_1=\int dx|\psi|^2 \text{ (оператор заряда)},$$

$$J_2=\frac{i}{2}\int dx\left(\psi\frac{\partial\bar\psi}{\partial x}-\bar\psi\frac{\partial\psi}{\partial x}\right) \text{ (оператор импульса)},$$

$$J_3=H.$$

Ур-ния вида $\dfrac{\partial\psi}{\partial t}=\{J_n, \psi\}$ принято называть **высшими** Ш. у. н.

Векторное Ш. у. н. описывает движение заряж. скалярного поля $\psi_a(x, t)$, $a=1, ..., n$ с n цветами:

$$i\frac{\partial\psi}{\partial t}=-\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+2\varkappa\psi(\psi\psi^*),$$

где под ψ^* подразумевается вектор-столбец, эрмитово сопряжённый к вектор-строке ψ. Векторное Ш. у. н., как и скалярное, представимо в виде условия нулевой кривизны. Матрицы U и V в этом случае имеют размерность $(n+1)\times(n+1)$ и в блочной записи являются прямым обобщением матриц U и V скалярного ур-ния. Гамильтониан модели и скобки Пуассона даются ф-лами

$$H=\int dx\left[\frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial\psi^*}{\partial x}+\varkappa(\psi\psi^*)^2\right],$$

$$\{\psi_a(x), \bar\psi_b(y)\}=i\delta_{ab}\delta(x-y).$$

Иногда в литературе под термином «Ш. у. н.» подразумевают систему ур-ний

$$i\frac{\partial q}{\partial t}=-\frac{\partial^2 q}{\partial x^2}+2\varkappa q^2 r,$$
$$-i\frac{\partial r}{\partial t}=-\frac{\partial^2 r}{\partial x^2}+2\varkappa r^2 q, \qquad (2)$$

причём ф-ции q и r, вообще говоря, не являются комплексно сопряжёнными. Большинство результатов для ур-ния (1) справедливо и для системы (2), однако в последнем случае для разрешимости обратной задачи рассеяния требуется накладывать ряд дополнит. условий на данные рассеяния. Помимо стандартных методов для системы (2) существует метод построения решения с помощью преобразования Беклунда — Шлезингера. А именно, если q_0 и r_0 — решения (2), то

$$q_1=\varkappa q_0^2 r-q_0\frac{\partial^2}{\partial x^2}\ln q_0,$$

$$r_1=1/\varkappa q_0$$

также — решения (2). Указанное преобразование является простым способом построения солитонных решений ур-ния (1). А именно, в качестве затравочного решения системы (2) выбирается $r_0=0$, q_0 — общее решение свободного ур-ния. После N-кратного применения преобразования Беклунда — Шлезингера к q_0 и r_0 и наложения условия $q_n=\bar r_n$ получаем N-солитонное решение ур-ния (1).

Ряд разностных ур-ний, к-рые в непрерывном пределе переходят в Ш. у. н., обычно называют **решёточными** Ш. у. н. К таким ур-ниям относится, напр., ур-ние Абловитца — Ладика:

$$i\frac{d\psi_n}{dt}=2\psi_n-\psi_{n+1}-\psi_{n-1}+\varkappa|\psi_n|^2(\psi_{n-1}+\psi_{n+1}).$$

Это ур-ние является гамильтоновым и вполне интегрируемым. Переход от непрерывной ф-ции $\psi(x, t)$ к дискретной переменной ψ_n часто используется при квантовании Ш. у. н.

Квантовое Ш. у. н.

$$i\frac{\partial\psi}{\partial t}=-\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+2\varkappa\psi^+\psi\psi$$

описывает квантовую одномерную систему многих частиц с парным взаимодействием, к-рое задаётся потенциалом $2\varkappa\delta(x-y)$. Здесь $\psi^+(x, t)$ и $\psi(x, t)$ являются соответственно операторами рождения и уничтожения, действующими в *Фока пространстве* $\psi|0\rangle=0$, $\langle 0|\psi^+=0$. Одновременные перестановочные соотношения задаются ф-лой

$$[\psi(x, t), \psi^+(y, t)]=\delta(x-y).$$

Гамильтониан модели

$$H=\int dx\left(\frac{\partial\psi^+}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial x}+\varkappa\psi^+\psi^+\psi\psi\right).$$

Квантовое Ш. у. н. допускает представление нулевой кривизны, аналогичное представлению для классического Ш. у. н. Перестановочные соотношения между матричными элементами матрицы монодромии, к-рая определяется так же, как и в классич. случае, задаются с помощью квантовой R-матрицы:

$$R(\lambda, \mu)(T(\lambda)\otimes I)(I\otimes T(\mu))=(I\otimes T(\mu))(T(\lambda)\otimes I)R(\lambda, \mu),$$

$$R(\lambda, \mu)=I-\frac{i\varkappa}{2(\lambda-\mu)}\sum_{a=0}^{3}\sigma_a\otimes\sigma_a.$$

Как и классическое, квантовое Ш. у. н. является вполне интегрируемым и обладает бесконечным набором интегралов движения. Многочастичная *матрица рассеяния* сводится к произведению двучастичных матриц рассеяния.

Квантовое Ш. у. н. решается с помощью анзаца Бете. Конкретная формулировка анзаца Бете зависит от вида граничных условий, налагаемых на операторы ψ и ψ^+. В случае периодич. задачи на отрезке $-L\leqslant x\leqslant L$ собственные ф-ции гамильтониана H ищутся в виде

$$|\Phi_N\rangle=\int_{-L}^{L}dx_1\ldots dx_N\,\chi_N(x_1, ..., \bar x_N)\,\psi^+(x_1)\ldots\psi^+(x_N)|0\rangle,$$

$$N=0, 1, \ldots .$$

Ф-ция χ_N при этом определяется из условия