$$H_\nu^{(1)}(z)=-\frac{1}{\pi}\int\limits_{C_+}\exp(iz\sin\varphi-i\nu\varphi)\,d\varphi,$$

$$H_\nu^{(2)}(z)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{C_-}\exp(iz\sin\varphi-i\nu\varphi)\,d\varphi$$

(контуры C_1, C_+, C_- изображены на рис. 2). При $\nu=n$ (где n — целое)

$$J_n(z)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\exp(iz\sin\varphi-in\varphi)\,d\varphi,$$

$$\exp(iz\sin\varphi)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}J_n(z)e^{in\varphi}.$$

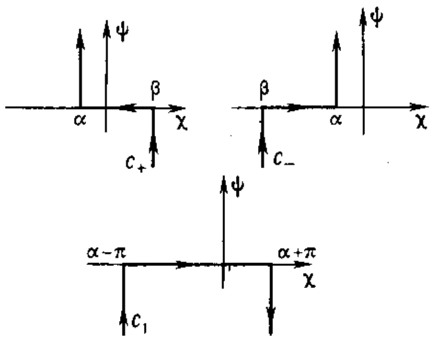

Рис. 2. Контуры интегрирования $C_\pm$ и C_1 ($\varphi=\chi+i\psi$). Числа α и β связаны соотношением $\beta=\alpha\pm\pi$.

Рекуррентные соотношения и ф-лы дифференцирования:

$$Z_{\nu-1}(z)+Z_{\nu+1}(z)=\frac{2\nu}{z}Z_\nu(z),$$

$$Z_{\nu-1}(z)-Z_{\nu+1}(z)=2Z'_\nu(z),$$

$$\left(\frac{1}{z}\frac{d}{dz}\right)^n\left[z^\nu Z_\nu(z)\right]=z^{\nu-n}Z_{\nu-n}(z),$$

$$\left(-\frac{1}{z}\frac{d}{dz}\right)^n\left[z^{-\nu}Z_\nu(z)\right]=z^{-(\nu+n)}Z_{\nu+n}(z)$$

$[Z_\nu(z)$ — любая из ф-ций $J_\nu(z)$, $Y_\nu(z)$, $H_\nu^{(1,2)}(z)]$.

Ц. ф. полуцелого порядка. Ц. ф. превращаются в элементарные тогда и только тогда, когда ν принимает полуцелые значения ($\nu=n\pm1/2$):

$$J_{1/2}(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\sin z,\quad Y_{1/2}(z)=-\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\cos z,$$

$$H_{1/2}^{(1,2)}(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\,e^{\pm i(z-\pi/2)},$$

$$J_{n-1/2}(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\,z^n\left(-\frac{1}{z}\frac{d}{dz}\right)^n\cos z\ (n=0,\ 1,\ \ldots),$$

$$H_{n-1/2}^{(1,2)}(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\,z^n\left(-\frac{1}{z}\frac{d}{dz}\right)^n e^{\pm iz}\ (n=0,\ 1,\ \ldots),$$

$$Y_{n-1/2}(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\,z^n\left(-\frac{1}{z}\frac{d}{dz}\right)^n\sin z\ (n=0,\ 1,\ \ldots).$$

Асимптотическое поведение Ц. ф. Для $|z|\gg1$, $|z|\gg\nu$ имеют место оценки:

$$J_\nu(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\left\{\cos\left(z-\frac{\pi\nu}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\left[\sum_{m=0}^{M-1}(-1)^m\frac{(\nu,2m)}{(2z)^{2m}}+\right.\right.$$
$$\left.+O(|z|^{-2M})\right]-\sin\left(z-\frac{\pi\nu}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\left[\sum_{m=0}^{M}(-1)^m\frac{(\nu,2m+1)}{(2z)^{2m+1}}+\right.$$
$$\left.\left.+O(|z|^{-2M-1})\right]\right\}$$
$$(-\pi<\arg z<\pi);$$

$$H_\nu^{(1)}(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\exp\left[i\left(z-\frac{\pi\nu}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\right]\left[\sum_{m=0}^{M-1}\frac{(\nu,m)}{(-iz)^m}+O(|z|^{-M})\right]$$
$$(-\pi<\arg z<2\pi).$$

Здесь $(\nu,m)=\Gamma(1/2+\nu+m)/[m!\Gamma(1/2+\nu-m)]$ — т. н. символ Ханкеля. Выражение для $H_\nu^{(2)}(z)$ аналогично выражению для $H_\nu^{(1)}(z)$, в к-ром (при $-2\pi<\arg z<\pi$) i надо заменить на $-i$.

Интеграл Фурье—Бесселя:

$$f(x)=\int_0^\infty kF(k)J_\nu(kx)\,dk,$$

$$F(k)=\int_0^\infty xf(x)J_\nu(kx)\,dx.$$

Теорема сложения Графа:

$$Z_\nu(kR)e^{i\nu\psi}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}J_n(kr)Z_{\nu+n}(k\rho)e^{in\theta},\ (r<\rho).$$

Теорема сложения Гегенбауэра:

$$\frac{Z_\nu(kR)}{(kR)^\nu}=2^\nu\Gamma(\nu)\sum_{n=0}^{\infty}(\nu+n)\frac{J_{\nu+n}(kr)}{(kr)^\nu}\frac{Z_{\nu+n}(k\rho)}{(k\rho)^\nu}C_n^\nu(\mu),\ (r<\rho).$$

Здесь r, ρ, R — стороны произвольного треугольника; ψ — угол, лежащий между сторонами R и ρ; $\mu=\cos\theta$; θ — угол между сторонами r и ρ; k — произвольное число; $C_n(\mu)$ — полином Гегенбауэра (см. *Ортогональные полиномы*); $Z_\nu(z)$ — любая из ф-ций $J_\nu(z)$, $Y_\nu(z)$, $H_\nu^{(1,2)}(z)$.

Разложение сферич. волны по полиномам Лежандра:

$$\frac{e^{ikR}}{R}=i\pi\sum_{n=0}^{\infty}(n+1/2)\frac{J_{n+1/2}(kr)}{\sqrt{r}}\frac{H_{n+1/2}^{(1)}(k\rho)}{\sqrt{\rho}}P_n(\mu).$$

Разложение плоской волны по полиномам Лежандра:

$$e^{ikr}=\sqrt{\frac{2\pi}{kr}}\sum_{n=0}^{\infty}i^n\left(n+\frac{1}{2}\right)J_{n+1/2}(kr)P_n(\mu),$$

$\boldsymbol{k}$ — волновой вектор; $\mu=\cos\theta$; θ — угол между векторами $\boldsymbol{k}$ и $\boldsymbol{r}$.

Модифицированные ф-ции Бесселя (ф-ции Бесселя мнимого аргумента) — решения ур-ния

$$z^2u''+zu'-(z^2+\nu^2)u=0,\ u(z)=Z_\nu(iz).$$

Линейно независимыми решениями при $z>0$ являются ф-ции

$$I_\nu(z)=e^{-i\pi\nu/2}J_\nu(iz),\ K_\nu(z)=\frac{\pi}{2}e^{i\pi(\nu+1)/2}H_\nu^{(1)}(iz)$$

[рис. 3; ф-ции $K_\nu(z)$ иногда наз. ф-циями Макдональда].

Интегральные представления Пуассона ($\mathrm{Re}\,\nu>-1/2$):

$$I_\nu(z)=\frac{(z/2)^\nu}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\nu+1/2)}\int_0^\infty \mathrm{ch}\,zs(1-s^2)^{\nu-1/2}ds,$$

$$K_\nu(z)=\sqrt{\frac{\pi}{2z}}\,e^{-z}\frac{1}{\Gamma(\nu+1/2)}\int_0^\infty e^{-s}s^{\nu-1/2}\left(1+\frac{s}{2z}\right)^{\nu-1/2}ds.$$