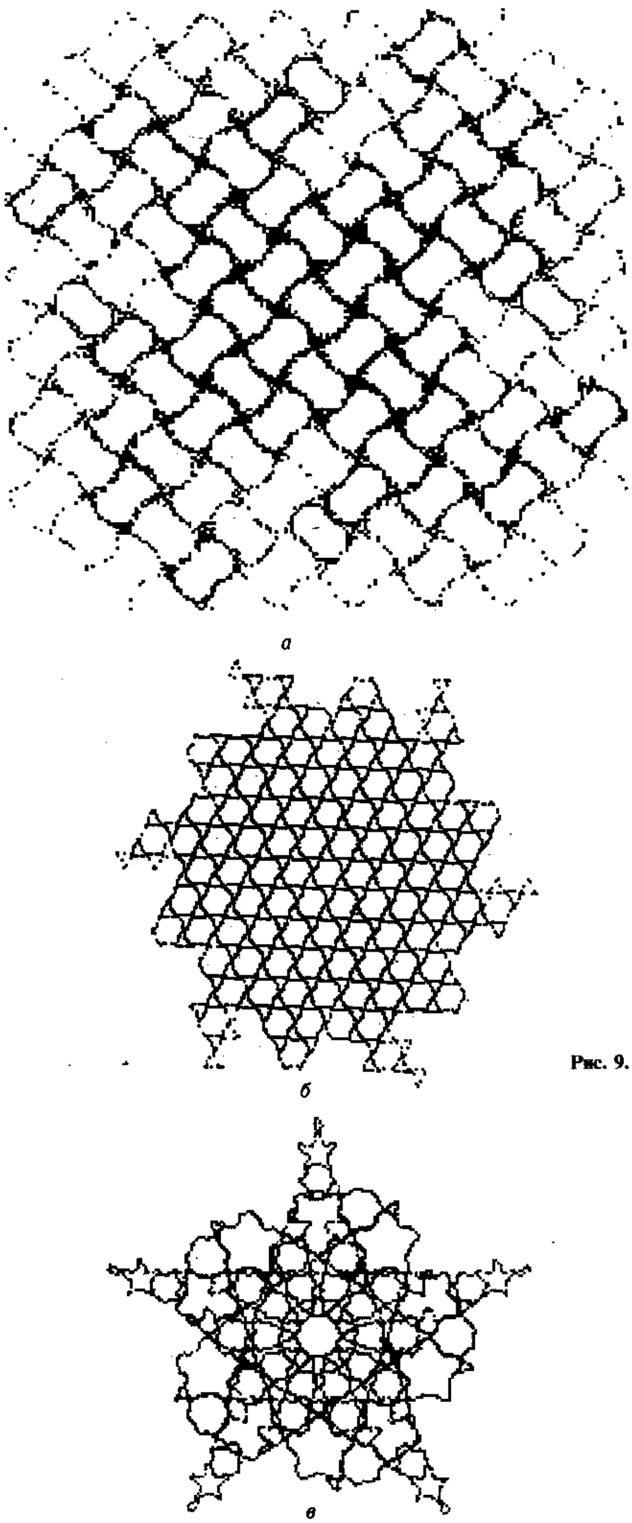

а б в

Рис. 9.

ство диссипативных систем может содержать не только те структурные элементы, к-рые имеются в случае гамильтоновых систем, но и такие, как аттракторы и репеллоры. Первые характеризуются тем, что к ним асимптотически притягиваются все фазовые траектории из нек-рой области $\Delta\Gamma$ фазового пространства, называемой областью притяжения (см. *Устойчивость движения*). Для вторых характерна неустойчивость, т. е. отход любой траектории, начинающейся в нек-рой окрестности репеллора (иными словами, асимптотич. свойства траекторий в окрестности аттрактора и репеллора аналогичны, если только для первых смотреть прямую эволюцию, т. е. при $t\to+\infty$, а для вторых — обратную, т. е. при $t\to-\infty$). Наиб. интерес для анализа свойств диссипативных систем представляют именно аттракторы.

В ходе эволюции динамич. системы, обладающей аттрактором, объём фазовой капли неограниченно уменьшается — капля сжимается к аттрактору. Однако сам аттрактор, имея нулевую меру в исходном фазовом пространстве, может оказаться нетривиальным множеством, движение на к-ром является стохастическим. Это значит, что: 1) на таком аттракторе движение является локально неустойчивым и для него может быть введена К-энтропия и 2) это движение обладает свойствами эргодичности и перемешивания. Аттрактор, на к-ром реализуется стохастич. динамика, наз. **стохастическим** или **странным аттрактором**. Последний термин предложен Д. Рюэлем и Ф. Такенсом (D. Ruelle, F. Takens).

Асимптотич. устойчивость аттрактора как множества в фазовом пространстве определяется сжатием фазового объёма: ср. скорость этого сжатия может быть выражена через показатели Ляпунова, определяемые аналогично (1):

$$\lambda=\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\ln\frac{D(t)}{D(0)}. \qquad (19)$$

Для разл. направлений величина λ принимает разл. значения, так что всего имеется M разл. показателей (M — число дифференц. ур-ний 1-го порядка, описывающих движение системы). Из них один, отвечающий смещению вдоль аттрактора, равен нулю вследствие финитности движения. Все показатели λ_i можно упорядочить, так что для странного аттрактора окажется

$$\lambda_1>\ldots>\lambda_q=0>\ldots>\lambda_M. \qquad (20)$$

Скорость сжатия фазового объёма определится тогда равенством

$$\frac{1}{V}\frac{dV}{dt}=\sum_{i=1}^{M}\lambda_i<0. \qquad (21)$$

Показатели Ляпунова связаны с К-энтропией. Если все λ_i не зависят от точки, то

$$h=\sum_{\lambda_i>0}\lambda_i. \qquad (22)$$

В сумму входят только положительные показатели, поскольку именно они определяют разбегание фазовых траекторий, имеющее место только на аттракторе.

Странный аттрактор, занимая область фазового пространства нулевой меры, не может тем не менее целиком лежать в плоскости (поскольку фазовые траектории не пересекаются). Кроме того, он должен иметь размерность $d>1$. С геом. точки зрения он представляет собой, как правило, фрактальное множество, характеризуемое фрактальной размерностью (размерностью Хаусдорфа) d_C, являющейся дробным числом, превышающей размерность топологическую d_T (см. *Фракталы*).

В качестве примера диссипативной динамич. системы, демонстрирующей стохастич. поведение, можно привести *Лоренца систему*:

$$\begin{aligned}\dot{x}&=-\sigma x+\sigma y,\\ \dot{y}&=rx-y-xz,\\ \dot{z}&=xy-bz,\end{aligned} \qquad (23)$$

где σ, r, b — неотрицат. числа. Сжатие фазового объёма в (23) однородно:

$$\frac{1}{V}\frac{dV}{dt}=\frac{\partial\dot{x}}{\partial x}+\frac{\partial\dot{y}}{\partial y}+\frac{\partial\dot{z}}{\partial z}=-(\sigma+b+1)<0. \qquad (24)$$

Стохастич. динамика обнаружена Лоренцем при $\sigma=10$, $b=8/3$, $r=24{,}74$. Размерность странного аттрактора оказалась $d_C\approx2{,}05$ (при $r=28$).