сигналов можно записать в виде

$$G(\omega)=F(\omega)H(\omega), \qquad (6)$$

$$G(u, v)=F(u, v)H(u, v), \qquad (7)$$

где $H(\omega)=\int h(t)\exp(-i\omega t)\,dt$ — частотная характеристика временно́го фильтра, а $H(u, v)$ — частотная характеристика пространств. фильтра, являющаяся фурье-преобразованием ф-ции рассеяния точки:

$$H(u, v)=\iint h(x, y)\exp[-i(ux+vy)]\,dxdy. \qquad (8)$$

Одно из важнейших преимуществ спектрального подхода — простота операции, связывающей спектры сигналов на входе и выходе фильтра.

Представление сигнала $f(t)$ в виде интеграла Фурье

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int F(\omega)\exp(i\omega t)\,d\omega \qquad (9)$$

имеет ясный физ. смысл: равенство (9) утверждает, что сигнал $f(t)$ может быть представлен суммой гармонич. колебаний, причём спектр $F(\omega)=A(\omega)\exp i\varphi(\omega)$ определяет вклады гармоник разл. частот — их амплитуды $A(\omega)$ и нач. фазы $\varphi(\omega)$.

Гармонич. колебания $\exp i\omega t$ имеют особое значение в задачах линейной фильтрации: при возбуждении ими линейного стационарного фильтра в последнем возникают вынужденные гармонич. колебания той же частоты ω. Др. словами, гармонич. ф-ции $\exp i\omega t$ являются собств. ф-циями линейной стационарной системы. Это можно записать в виде операторного равенства

$$L[\exp i\omega t]=H(\omega)\exp i\omega t, \qquad (10)$$

где $H(\omega)=B(\omega)\exp i\alpha(\omega)$ — частотная характеристика фильтра, определяющая амплитуду $B(\omega)$ и сдвиг по фазе $\alpha(\omega)$ вынужденных колебаний относительно внеш. воздействия.

Пространственное фурье-разложение. Комплексную амплитуду волны $f(x, y)$ можно представить в виде интеграла Фурье [двумерный аналог ф-лы (9)]:

$$f(x, y)=\frac{1}{4\pi^2}\iint F(u, v)\exp[i(ux+vy)]\,du\,dv. \qquad (11)$$

Физ. смысл разложения (11) состоит в следующем. Можно проверить, что ф-ция

$$f(x,y,z)=\exp\left[i\left(ux+vy+\sqrt{k^2-u^2-v^2}\,z\right)\right] \qquad (12)$$

является решением ур-ния Гельмгольца (1), удовлетворяющего на плоскости $z=0$ граничному условию

$$f(x,y,z)\big|_{z=0}=\exp[i(ux+vy)]. \qquad (13)$$

Это утверждение справедливо при любых значениях параметров u, v. Ф-ция (12) есть комплексная амплитуда плоской волны, причём параметры u, v — проекции волнового вектора $\boldsymbol{k}$ этой волны на оси x, y, если $|u^2+v^2|\leqslant(\omega/c)^2=k^2$. Если же $|u^2+v^2|>k^2$, выражение (12) также является решением (1) и наз. неоднородной волной (амплитуда волны спадает с ростом z экспоненциально, поскольку $k_z=\sqrt{k^2-u^2-v^2}$ — в этом случае мнимое число).

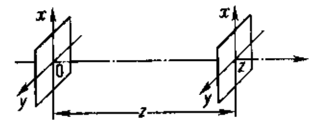
Т. о., выражение (11) есть представление произвольной волны, заданной в нек-рой плоскости $z=\text{const}$, в виде суперпозиции плоских волн, как бегущих, так и неоднородных.

Плоская волна $\exp[i(ux+vy)]$ в задачах пространств. фильтрации является аналогом гармонич. колебания $\exp i\omega t$. Поэтому пару чисел u, v наз. пространственными частотами.

Частотная характеристика свободного пространства. Участок свободного пространства между двумя плоскостями $z=0$ и $z=\text{const}>0$ (рис. 3) является простейшим пространств. фильтром. Согласно (12) и (13), распространение плоской волны между двумя плоскостями приводит лишь к появлению множителя $\exp\left[i\sqrt{k^2-u^2-v^2}\,z\right]$, определяющего набег фазы волны (при $|u^2+v^2|\leqslant k^2$) или экспоненц. уменьшение амплитуды (при $|u^2+v^2|>k^2$). Это утверждение можно записать в виде операторного равенства:

$$L\{\exp[i(ux+vy)]\}=H(u, v)\exp[i(ux+vy)], \qquad (14)$$

Рис. 3.



где $H(u, v)=\exp\left(i\sqrt{k^2-u^2-v^2}\,z\right)$ — частотная характеристика свободного пространства. Экспоненц. ф-ции $\exp[i(ux+vy)]$ при любых (u, v) являются, согласно (14), собственными ф-циями пространств. фильтра.

Пространственная модуляция. В радиоэлектронике модуляция сигнала записывается как операция перемножения модулируемого колебания $f(t)$ и модулирующего сигнала $m(t)$, в результате к-рой на выходе модулятора имеем модулированный сигнал $g(t)=f(t)m(t)$. Различают два вида модуляции: амплитудную, когда $m(t)$ — действительная положит. ф-ция $a(t)$, и фазовую: $m(t)=\exp i\varphi(t)$. Если несущее (модулируемое) колебание — гармонич. ф-ция $f(t)=\exp i\omega t$, то в первом случае на выходе имеем амплитудно-модулированное колебание $g(t)=a(t)\exp i\omega t$, а во втором — колебание, модулированное по фазе $g(t)=\exp\{i[\omega t+\varphi(t)]\}$. Операцию модуляции изображают символически с помощью блок-схемы (рис. 4, *а*).

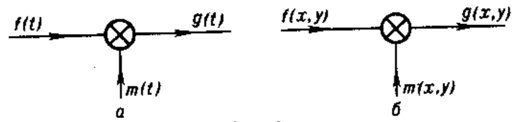


Рис. 4.

Пространств. модуляция осуществляется в оптике с помощью тонких пластинок — транспарантов,— обладающих в разных точках разл. поглощательной способностью и (или) показателем преломления. При освещении пластинки плоской волной $\exp i(ux+vy)$ это приводит к тому, что амплитуда волны на выходе из пластинки оказывается различной в разных точках (в соответствии с изменением поглощат. способности), т. е. имеем амплитудную модуляцию волны:

$$g(x,y)=a(x,y)\exp[i(ux+vy)].$$

Если пластинка имеет различный в разных точках показатель преломления $n(x,y)$ [или толщину $h(x,y)$], то набег фазы волны при прохождении пластинки оказывается в разных местах различным: $\varphi(x,y)=kn(x,y)h(x,y)$ — получается фазовая модуляция:

$$g(x,y)=\exp\{i[ux+vy+\varphi(x,y)]\}.$$

В общем случае с помощью транспаранта осуществляется как амплитудная, так и фазовая пространств. модуляция.

Ф-ция $m(x,y)=a(x,y)\exp i\varphi(x,y)$, определяющая характер пространств. модуляции и связывающая комплексную амплитуду волны на входе и выходе транспаранта $g(x,y)=m(x,y)f(x,y)$, наз. ф-цией пропускания (или модуляц. характеристикой) транспаранта. Операция пространств. модуляции изображается с помощью блок-схемы, изображённой на рис. 4 *(б)*. Для осуществления пространств. модуляции в оптике используют различного вида маски, пластинки, амплитудные и фазовые решётки.

Преобразование Фурье, осуществляемое линзой. Осн. элементом любого оптич. устройства является линза. Идеальная безаберрационная линза осуществляет фазовую модуляцию вида

$$m(x,y)=\exp\left[-i\frac{k}{2f}(x^2+y^2)\right],$$