Во мн. случаях необходимо рассматривать зависимость свойств системы от к.-л. параметров. Напр., вместо (1) нужно изучать систему, описываемую ур-нием

$$\dot{x}_i = F_i(x_1, \ldots, x_n; \alpha), \; i = 1, 2, \ldots, n, \qquad (4)$$

где $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k)$ — совокупность физ. параметров. В случае нелинейного осциллятора

$$\ddot{x} + \omega^2 x + \varepsilon x^2 - x^3 = 0$$

качественно разл. параметрами являются ω и ε. Все системы (4) (т. е. отвечающие разл. значениям α) можно рассматривать с помощью одного и того же Ф. п. Это позволяет сопоставлять свойства систем, отличающихся конкретными значениями параметров. Напр., может оказаться, что в нек-рых интервалах значений α для траекторий доступны не все области фазового пространства из числа тех, к-рые доступны при др. значениях. Так, для системы, описываемой ур-нием

$$\ddot{x} + \sqrt{x^2 + \alpha} = 0,$$

при $\alpha > 0$ фазовым траекториям доступно всё фазовое пространство (при подходящем выборе нач. условий), тогда как при $\alpha < 0$ область $|x| < \sqrt{-\alpha}$ является «запрещённой».

При изменении параметров α в (4) могут происходить не только количеств. изменения (смещения траекторий, изменения скоростей), но и качеств. преобразования, при к-рых возникают новые структурные элементы фазового портрета или исчезают нек-рые из имеющихся, т. е. происходит перестройка структуры фазового портрета. Закономерности такой перестройки устанавливаются методами теорий *бифуркаций* и катастроф (см. также *Катастроф теория*).

Выберем в фазовом пространстве динамич. системы (1) нек-рую область Ω_0. Её объём равен

$$V_0 = \int\limits_{\Omega_0} dx_1 dx_2 \ldots dx_n. \qquad (5)$$

Область Ω_0 можно рассматривать как совокупность нач. точек нек-рого набора фазовых траекторий, т. е. нек-рую каплю «фазовой жидкости». Под действием фазового потока T^t область Ω_0 переходит в область Ω_t с объёмом

$$V_t = \int\limits_{\Omega_t} dx_1 dx_2 \ldots dx_n. \qquad (6)$$

Согласно теореме Лиувилля — Остроградского, для динамич. системы (1)

$$\frac{dV_t}{dt} = \int\limits_{\Omega_t} \operatorname{div} F \, dx_1 dx_2 \ldots dx_n, \qquad (7)$$

где

$$\operatorname{div} F = \frac{\partial F_1}{\partial x_1} + \frac{\partial F_2}{\partial x_2} + \ldots + \frac{\partial F_n}{\partial x_n}. \qquad (8)$$

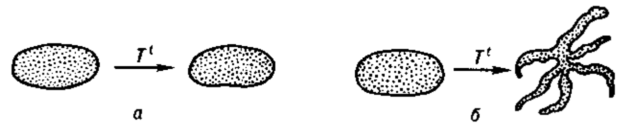
Отсюда следует, что если $\operatorname{div} F = 0$, то фазовый объём динамич. системы не меняется (*Лиувилля теорема*). Примером систем, сохраняющих фазовый объём, являются *гамильтоновы системы*, ур-ния движения к-рых имеют вид

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \; \dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \; i = 1, 2, \ldots, m, \qquad (9)$$

где $H = H(p, q)$ — ф-ция Гамильтона системы, q_i, p_i — обобщённые координаты и импульсы. Прямая подстановка (9) в (8) ($n = 2m$) показывает, что $\operatorname{div} F = 0$.

Для систем, сохраняющих фазовый объём, не могут существовать в Ф. п. такие структурные элементы, как аттракторы и репеллоры, поскольку наличие первых означало бы уменьшение, а вторых — увеличение фазового объёма. Это же означает, что в таких системах нет структурных элементов, обладающих свойством асимптотич. устойчивости при $t \to \infty$ (либо аналогичным свойством при $t \to -\infty$) (см. *Устойчивость движения*).

В условиях сохранения фазового объёма форма фазовой капли может меняться как незначительно (устойчивое движение), так и сильно (неустойчивое движение) — см. рис. Наличие неустойчивости может приводить к сложному, в т. ч. стохастич., поведению системы.



Деформация «фазовой капли» в случае устойчивого (*а*) и неустойчивого (*б*) движения гамильтоновой системы (объём капли сохраняется).

Если физ. система составлена из большого числа частиц, то часто целесообразно использовать статистич. методы описания. Именно, вводится ф-ция распределения частиц $f(q, p, t)$ в Ф. п., удовлетворяющая условию нормировки

$$\int\limits_{\Omega} f(q, p, t) dq dp = 1. \qquad (10)$$

Закон сохранения числа частиц в Ф. п. выражается ур-нием непрерывности

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \operatorname{div}(\boldsymbol{v} f) = 0. \qquad (11)$$

Здесь $\boldsymbol{v}(\dot{q}, \dot{p})$ — вектор скорости тока «фазовой жидкости», $\boldsymbol{v} = (\dot{q}, \dot{p})$. Для гамильтоновых систем условие сохранения фазового объёма $\operatorname{div} F = 0$ означает, согласно (9),

$$\operatorname{div} \boldsymbol{v} = 0, \qquad (12)$$

т. е. «фазовая жидкость» несжимаема. При этом ур-ние непрерывности (11) принимает вид

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \dot{q}\frac{\partial f}{\partial q} + \dot{p}\frac{\partial f}{\partial p} = 0 \qquad (13)$$

(ур-ние Лиувилля). Дальнейшее развитие этого подхода осуществлено в рамках *статистической физики*.

Из (7) следует, что при $\operatorname{div} F = \mathrm{const} = -\lambda$

$$V_t = V_0 \exp(-\lambda t). \qquad (14)$$

Такая ситуация реализуется, напр., в случае системы, описываемой ур-ниями Лоренца:

$$\dot{x} = -\sigma x + \sigma y, \; \dot{y} = rx - y - xz, \; \dot{z} = -bz + xy, \qquad (15)$$

для к-рой $\lambda = 1 + \sigma + b$. Для всех неотрицательных σ, r, b оказывается $\lambda > 0$ и фазовый объём всегда уменьшается.

При уменьшении фазового объёма траектории могут стремиться к нек-рой поверхности в исходном фазовом пространстве, имеющей размерность $D = n - k$, k — целое, $k \leqslant n$. В частном случае $k = n$ это отвечает приближению к нек-рому стационарному состоянию — особой точке в Ф. п. В то же время известно, что и при $V \to 0$ может существовать предельное множество (аттрактор), мера к-рого имеет размерность $d > 1$ (как правило, дробную, т. н. фрактальную размерность). Такая ситуация реализуется, напр., когда Ф. п. содержит *странный аттрактор*. Объект с такими свойствами всегда содержится в системе Лоренца (15) при $\sigma = 10$, $b = 8/3$, $r > 24{,}74$.

Системы с конечномерным Ф. п. являются, как правило, идеализированным образом реальных физ. систем. Напр., при описании теплового, эл.-магн. и др. полей, разл. рода взаимодействий и т. д. приходится иметь дело с характеристиками, заданными в пространстве: темп-рой $T(\boldsymbol{r}, t)$, напряжённостью поля $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, t)$ и др. Для этих характеристик также задаются нек-рые эволюц. ур-ния. Теперь, однако, Ф. п. такой динамич. системы является уже бесконечномерным. Иногда путём подходящего выбора базиса удаётся свести Ф. п. к счётномерному. Наконец, в ряде случаев с достаточной точностью можно описать поведение распределённой системы с помощью нек-рого