не пересекаются (в силу теоремы единственности решения системы обыкновенных дифференц. ур-ний; см. *Коши задача*).

Если ф-ции $F_i(x)$ в (2) недифференцируемы где-либо, то Ф. т. могут пересекаться. Напр., динамич. система, задаваемая ур-нием

$$\dot{x}=x^{2/3}, \qquad (3)$$

имеет две траектории при $-\infty<t<\infty$:

$$1)\ x_1=0,\ 2)\ x_2=(t/3)^3. \qquad (4)$$

Первая отвечает стационарному состоянию, вторая — инфинитному движению. Эти две Ф. т. пересекаются в точке $x=0$. Неединственность решения обусловлена недифференцируемостью при $x=0$ правой части ур-ния (3).

Время движения системы вдоль Ф. т., начинающегося с какой-либо нач. фазовой точки, может быть как бесконечным, так и конечным. Последнее имеет место, напр., в системе

$$\dot{x}=e^x,\ x|_{t=0}=x^0. \qquad (5)$$

Действительно, из (5) следует $x=-\ln(e^{-x^0}-t)$, так что движение инфинитно, но время эволюции конечно при любых конечных значениях x^0 и составляет $\Delta t=e^{-x^0}$.

Пусть в фазовом пространстве динамич. системы имеются стационарная точка и к.-л. траектории, идущие в эту точку. Пусть также система — гладкая в окрестности особой точки. Тогда время достижения этой точки вдоль любой траектории, не совпадающей с ней, бесконечно. Поэтому стационарные состояния отделены от прочих траекторий.

См. также *Динамическая система*, *Фазовое пространство*, *Устойчивость движения*, *Статистическая физика*.

Лит.: Арнольд В. И., Обыкновенные дифференциальные уравнения, 3 изд., М., 1984. *Н. А. Кириченко.*

ФА́ЗОВАЯ УСТО́ЙЧИВОСТЬ — то же, что *автофазировка.*

ФА́ЗОВОЕ ПРОСТРА́НСТВО в статистической физике, многомерное пространство, осями к-рого служат все обобщённые координаты q_i и импульсы p_i ($i=1, 2, ..., N$) механич. системы с N степенями свободы. Т. о., Ф. п. имеет размерность $2N$. Состояние системы изображается в Ф. п. точкой с координатами $q_1, p_1, ..., q_N, p_N$, а изменение состояния системы во времени — движением точки вдоль линии, называемой фазовой траекторией. Точки, соответствующие определ. значению энергии $\mathscr{E}$ системы, образуют в Ф. п. $(2N-1)$-мерную поверхность, делящую пространство на две части — более высоких и более низких значений энергии. Поверхности разл. значений энергии не пересекаются. Траектории замкнутой системы (с пост. значением $\mathscr{E}$) лежат на этих поверхностях. В принципе траектория может быть рассчитана на основе законов механики, такой расчёт можно осуществить практически, если число частиц системы не слишком велико. Для статистич. описания состояния системы из мн. частиц вводится понятие *фазового объёма* (элемента объёма Ф. п.) и *функции распределения* системы — вероятности пребывания точки, изображающей состояние системы, в любом элементе фазового объёма. Понятие Ф. п. — основное для классич. статистич. физики (механики), изучающей ф-ции распределения системы из мн. частиц. *Д. Н. Зубарев.*

ФА́ЗОВОЕ ПРОСТРА́НСТВО в теории динамических систем — абстрактное пространство, ассоциированное с конкретной динамич. системой, точки в к-ром однозначно характеризуют все возможные состояния данной системы. Предполагается, что это пространство снабжено естеств. определением меры (расстояний, площадей и т. д.).

Исторически понятие Ф. п. введено с целью более удобного, наглядного изучения поведения механич. систем. Пример. Состояние системы из N материальных точек, движущихся в 3-мерном пространстве, полностью характеризуется заданием значений $3N$ обобщённых координат

$$q=(q_x^{(1)}, q_y^{(1)}, q_z^{(1)}, ..., q_x^{(N)}, q_y^{(N)}, q_z^{(N)})$$

и $3N$ обобщённых импульсов

$$p=(p_x^{(1)}, p_y^{(1)}, p_z^{(1)}, ..., p_x^{(N)}, p_y^{(N)}, p_z^{(N)}).$$

Ф. п. этой системы является $6N$-мерное пространство, по координатным линиям к-рого откладываются значения обобщённых координат и импульсов ($\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}$).

В случае динамич. системы произвольной природы Ф. п. определяется подобным образом. Именно, пусть состояние данной системы полностью характеризуется заданием n переменных, т. е. поведение системы описывается n обыкновенными дифференц. ур-ниями 1-го порядка

$$\dot{x}_i=F_i(x_1, x_2, ..., x_n),\ i=1, 2, ..., n. \qquad (1)$$

Тогда такой системе ставится в соответствие n-мерное Ф. п., по осям координат к-рого откладываются значения переменных $x_1, x_2, ..., x_n$, называемых фазовыми переменными. Определение нормы в этом пространстве вводится, исходя из смысла переменных $x=(x_1, x_2, ..., x_n)$. Если Ф. п. 2-мерно (1-мерно), то о нём говорят как о фазовой плоскости (фазовой прямой). Напр., динамич. система, описываемая ур-нием

$$\ddot{x}+2\mu(1-\beta x^2)\dot{x}+\omega^2x=0,$$

имеет 2-мерное Ф. п. (фазовую плоскость), по осям координат к-рого откладываются значения x и $\dot{x}$.

Текущему состоянию системы отвечает нек-рый набор значений $\{x_i(t)\}$ и, следовательно, нек-рая точка в Ф. п., называемая фазовой точкой. С течением времени значения фазовых переменных меняются. Соответственно фазовая точка перемещается, описывая в Ф. п. нек-рую кривую, называемую *фазовой траекторией.*

Эволюция динамич. системы определяется посредством задания значений фазовых переменных в нач. момент времени

$$x|_{t=0}=x^0 \text{ или } x_i|_{t=0}=x_i^0,\ i=1, 2, ..., n, \qquad (2)$$

и задания эволюционного оператора T^t, преобразующего нач. состояние в состояние в момент времени t:

$$x(t)=T^tx^0 \text{ или } T^t\colon x_i^0\to x_i(t),\ i=1, 2, ..., n \qquad (3)$$

(*Коши задача*).

Тем самым в Ф. п. выделяется фазовая траектория, проходящая через точку x^0. Оператор T^t задаёт однопараметрич. группу преобразований Ф. п. на себя (параметр — время t) и удовлетворяет групповому свойству $T^tT^\tau=T^{t+\tau}$. Группа преобразований Ф. п., задаваемая оператором T^t, наз. фазовым потоком.

Если нач. точки не лежат на одной фазовой траектории, т. е. не могут быть получены одна из другой сдвигом с помощью оператора T^t за к.-л. конечное время t, то они порождают разл. фазовые траектории. Совокупность всевозможных фазовых траекторий образует фазовый портрет динамич. системы. Изучение фазовых портретов как способа геом. представления решений обыкновенных дифференц. ур-ний было начато А. Пуанкаре в 19 в.

Разл. фазовые траектории одной достаточно гладкой динамич. системы не пересекаются в Ф. п. (в противном случае, выбирая точку пересечения за нач. условие, мы получили бы, что из одной точки начинается более одной фазовой траектории; последнее противоречит теореме Коши). Фазовые траектории могут представлять собой либо отд. точки, либо замкнутые кривые, либо отрезки кривых конечной длины, заключённые между двумя точками (последние не принадлежат данной траектории), либо кривые, неограниченные в одну или обе стороны. Траектории, являющиеся точками, наз. особыми точками и отвечают стационарным состояниям динамич. системы. Классификация структурных элементов фазового портрета выполнена в теории колебаний.