$$U_0=\{u(\hat{O}\boldsymbol{r}+\boldsymbol{\alpha};\ \omega)e^{i\gamma}\},\qquad(9)$$

где $\hat{O}$ — матрица 3-поворотов, $\boldsymbol{\alpha}\in\mathbb{R}^3$, $\gamma\in[0,\ 2\pi]$. Подчеркнём, что частота ω в множестве (9) не фиксирована.

Если возмущённый солитон описывать полем $\psi=\varphi(t,\ \boldsymbol{r})\exp(-i\omega t)$, то возмущение ξ определим как $\xi=\varphi-u=\xi_1+i\xi_2$, $\xi_k^*=\xi_k$. Метрики ρ_0, ρ выберем в виде

$$\rho_0(\xi)=\sum_{k=1}^{2}(\|\dot{\xi}_k\|+\|\xi_k\|')_C;\ \rho(\xi)=\inf_{U_0}\sum_{k=1}^{2}(\|\dot{\xi}_k\|+\|\xi_k\|),\qquad(10)$$

где $\|\ \|$ — норма в $L_2(\mathbb{R}^3)$, значок C обозначает совместную норму в $L_2\cap C$,

$$\|\xi\|'=\|\nabla\xi\|+\|\xi\|.$$

Изучим Q-устойчивость солитонных решений (8), наложив условие фиксации заряда, уже предполагающееся в определении (10):

$$Q=\int d^3x\,(F_p-F_q s)j_0=Q[\psi_0]=Q_0.\qquad(11)$$

Введём удобные для дальнейшего обозначения:

$$h=-2\omega^2 s(F_{pp}-2F_{pq}s+F_{qq}s^2)+F_p-F_q s,$$
$$g=\operatorname{div}(u\boldsymbol{a})+uc,\ \boldsymbol{a}=\omega(F_{pq}s-F_{pp})\nabla s,$$
$$c=2\omega\left[F_p+s(F_{ps}-2F_q-F_{qs}s)-\omega^2 s(F_{pp}-3F_{pq}s+2F_{qq}s^2)\right].$$

Выберем в качестве функционала Ляпунова интеграл движения

$$V=\mathscr{E}-\omega Q,$$

где $\mathscr{E}$ — энергия поля. Его вторая вариация может быть представлена в виде

$$\delta^2 V=(\dot{\xi}_1,\ F_p\dot{\xi}_1)+(\dot{\xi}_2,\ h\dot{\xi}_2)+\sum_{k=1}^{2}(\xi_k,\ \hat{L}_k\xi_k),\qquad(12)$$

где введены самосопряжённые операторы

$$\hat{L}_1=2\omega^4 s(F_{pp}+4F_{qs}s^2-4F_{pq}s)+F_s+2F_{ss}s+$$
$$+\omega^2(-F_p+6F_q s-4F_{ps}s+8F_{qs}s^2)+$$
$$+\operatorname{div}\{-F_p\nabla-2F_{pp}\nabla u(\nabla u\nabla)+[\omega^2(F_{pp}-2F_{pq}s)-F_{ps}]\nabla s\};$$
$$L_2=F_s-\omega^2F_p+F_q(\omega^2 s-p)-\operatorname{div}\left[(F_p-F_q s)\nabla+F_q\nabla s/2\right].$$

Из (12) следует, что для положительной определённости $\delta^2 V$ необходимо выполнение неравенств $F_p>0$, $h>0$.

Оказывается, что безузловые солитоны ($u>0$) могут быть устойчивыми, тогда как узловые солитоны (для к-рых на нек-рых поверхностях $u=0$) всегда неустойчивы. Заметим, что для безузловых солитонов спектр оператора $\hat{L}_2$ неотрицателен, т. к. $\hat{L}_2 u=0$, $u>0$, и поэтому u — первая собственная ф-ция оператора $\hat{L}_2$, тогда как нулевая мода $\xi_2=u$ исключается выбором метрики ρ.

Анализируя структуру второй вариации (12), можно установить справедливость следующей теоремы (Q-теоремы): безузловые стационарные решения (8) Q-устойчивы по Ляпунову в области

$$\frac{\partial Q}{\partial\omega}<0,\qquad(13)$$

если в ней оператор $\hat{L}_1$ имеет единств. отрицат. собств. значение, а собств. ф-ция ψ_- удовлетворяет условию

$$(g,\ \psi_-)\neq 0.\qquad(14)$$

Условия Q-теоремы необходимы для устойчивости безузловых солитонов, что можно установить с помощью следующего функционала Четаева:

$$W=-\Delta V[(\xi_1,\ F_p\dot{\xi}_1)-(\xi_2,\ h\dot{\xi}_2)+(\xi_1,\ c\xi_2)-(\xi_2,\ \boldsymbol{a}\nabla\xi_1)],$$

где $\Delta V=V-V_0$, $V_0=V[\psi_0]$. Вычисляя его производную $\dot{W}$, находим:

$$\dot{W}=-\Delta V[(\dot{\xi}_1,\ F_p\dot{\xi}_1)-(\dot{\xi}_2,\ h\dot{\xi}_2)-(\xi_1,\ \hat{L}_1\xi_1)+(\xi_2,\ \hat{L}_2\xi_2)].$$

Отсюда следует, что в области $\Delta V<0$ $\dot{W}>0$, т. е. имеет место неустойчивость солитонов.

Чтобы убедиться в неустойчивости узловых солитонов, заметим, что в этом случае возмущение ξ_2 всегда содержит решение однородного ур-ния $h\ddot{\eta}+\hat{L}_2\eta=0$, допускающего знакопеременный интеграл «энергии»

$$\mathscr{E}=(\dot{\eta},\ h\dot{\eta})+(\eta,\ \hat{L}_2\eta),$$

т. к. оператор $\hat{L}_2$ имеет отрицат. собств. значения. Это видно из ур-ния $\hat{L}_2 u=0$ и наличия узлов у ф-ции $u(\boldsymbol{r})$. Неустойчивость доказывается существованием функционала Четаева $W=-\mathscr{E}(\eta,\ h\dot{\eta})$, для к-рого $\dot{W}>0$ в области $\mathscr{E}<0$.

Рассмотрим примеры применения Q-теоремы для анализа устойчивости солитонов в D-мерном пространстве.

1) С т е п е н н а я м о д е л ь. В этом случае $F=p+s-s^n/n$ и ф-ция $u(\boldsymbol{x})$ удовлетворяет ур-нию

$$[\Delta-1+\omega^2+u^{2(n-1)}]u=0,\qquad(15)$$

к-рое имеет безузловое решение $u(r)$ при условиях $|\omega|<1$, $0<1-1/n\leqslant 2/D$. Выполнив в (15) замену переменных: $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{r}(1-\omega^2)^{-1/2}$, $u=v(1-\omega^2)^{\sigma}$, $\sigma^{-1}=2(n-1)$, находим заряд $Q(\omega)$ невозмущённого солитона:

$$Q(\omega)=\omega\|u\|^2=C\omega(1-\omega^2)^{\gamma},$$
$$\gamma=(n-1)^{-1}-D/2,\quad C=\mathrm{const}.\qquad(16)$$

Из (16) следует, что условие (13) выполнено для частот

$$1>|\omega|>\left(\frac{n+1}{n-1}-D\right)^{-1/2}.\qquad(17)$$

Условие (14) также выполнено, т. к. $g=2\omega u\neq 0$, а ф-ция $\psi_-\neq 0$ как первая собств. ф-ция оператора $\hat{L}_1$. Поэтому неравенство (17) определяет область устойчивости безузловых солитонов.

2) Л о г а р и ф м и ч е с к а я м о д е л ь задаётся ф-цией $F=p+s(1-\ln s)$ и допускает решения вида

$$u(r)=\exp[(D-\omega^2-r^2)/2].$$

Отсюда находим зависимость заряда от частоты:

$$Q(\omega)=\omega\|u\|^2=C\omega\exp(-\omega^2),\quad C=\mathrm{const},$$

определяющую, согласно (13), область устойчивости:

$$|\omega|>2^{-1/2}.$$

3) *Шрёдингера уравнение нелинейное* $-i\dot{\psi}=[\Delta+$ $+|\psi|^{2(n-1)}]\psi$, $n>1$, допускает решения (8) с амплитудой u, подчиняющейся ур-нию (15) с переобозначением $\omega^2-1\to\omega<0$. Замена переменных $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{r}|\omega|^{-1/2}$, $u=v|\omega|^{\sigma}$, $\sigma^{-1}=2(n-1)$ позволяет найти заряд как ф-цию от ω:

$$Q(\omega)=\|u\|^2=C|\omega|^{\gamma},\quad\gamma=(n-1)^{-1}-D/2,\quad C=\mathrm{const}.$$

Отсюда следует, что в области устойчивости $1<n<1+2/D$, а при $n>1+2/D$ солитоны неустойчивы. Это устанавливается с помощью функционала Четаева $W=(V_0-V)(\xi_1,\ \xi_2)$.

3. **Метод Захарова — Кузнецова** (1974). Метод состоит в доказательстве ограниченности снизу энергии консервативной системы при условии фиксации нек-рых дополнит. интегралов движения. Проиллюстрируем метод на последнем примере, показав, что интеграл энергии $\mathscr{E}$ в $\mathbb{R}^3$ оценивается снизу через заряд Q. В самом деле,

$$\mathscr{E}[\psi]=\int d^3x\left(|\nabla\psi|^2-\frac{1}{n}|\psi|^{2n}\right)=\|\nabla\psi\|^2-\frac{1}{n}\|\psi^n\|^2.$$

Вводя обозначение $I_{2k}=\|\psi^k\|^2$, $k=1,\ 2,\ \ldots$, и используя неравенства

$$\|\nabla\psi\|^2\geqslant\alpha I_6^{1/3},\ \alpha=3\left(\frac{\pi}{2}\right)^{4/3},\ I_{2n}\leqslant I_2^{(3-n)/2}I_6^{(n-1)/2},$$

приходим к оценке

$$\mathscr{E}[\psi]\geqslant\alpha I_6^{1/3}-\frac{1}{n}I_2^{(3-n)/2}I_6^{(n-1)/2}.$$

Если $5>3n$, то правая часть этого неравенства имеет минимум при