Часто используется также понятие формальной, или энергетической, устойчивости, когда существует закон сохранения

$$\mathscr{E}=\int d^D x F(\varphi,\ \dot\varphi,\ \nabla\varphi)=\mathrm{const},$$

или закон эволюции $\dot{\mathscr{E}}\leqslant 0$, такие, что в окрестности изучаемого решения $\delta\mathscr{E}=0$, $\delta^2\mathscr{E}>0$. Ясно, что из энергетич. устойчивости вытекает линеаризованная, т. к. в силу линеаризованных ур-ний эволюции $\delta^2\dot{\mathscr{E}}\leqslant 0$, и чтобы убедиться в устойчивости, достаточно взять $\rho^2=\rho_0^2=\delta^2\mathscr{E}$. Однако обратное неверно, что подтверждается примером из механики, когда гамильтониан имеет вид

$$H=\frac{1}{2}(p_1^2+q_1^2-p_2^2-q_2^2-q_1^2q_2^2)=\mathscr{E}.$$

Линеаризованная устойчивость в этом примере очевидна (два независимых осциллятора), но квадратичная форма $\delta^2 H=\delta p_1^2+\delta q_1^2-\delta p_2^2-\delta q_2^2$ знакопеременна.

Наконец, говорят об устойчивости в целом или глобальной устойчивости, если система устойчива для любых, как угодно больших, значений ρ_0, ρ. Это наиб. сильная устойчивость.

Осн. критерий неустойчивости даётся следующей теоремой.

Теорема Четаева—Мовчана о неустойчивости (1960). Для неустойчивости решения $u\in U$ по метрикам ρ_0, ρ необходимо и достаточно, чтобы существовал функционал Четаева $W[\varphi]$ со следующими свойствами: W непрерывен по метрике ρ_0, ограничен по метрике ρ, растёт со временем вдоль траектории движения в области $W>0$. Т. о., смысл теоремы состоит в том, что обеспечивается существование таких нач. возмущений, к-рые выводят систему из заданного режима движения.

Осн. задача исследования У. с. прямым методом состоит в отыскании соответствующих функционалов V или W. Если функционал Ляпунова выбран, то предстоит убедиться в его выпуклости, т. е. в выполнении условия $\delta^2 V[u+\xi]\geqslant m(\rho)$. Однако на практике в лучшем случае удаётся проверить лишь локальное условие $\delta^2 V[u]>0$. Т. о., представляется необходимым изучить структуру второй вариации функционала Ляпунова. При этом выясняется, что в наиб. распространённом случае, когда солитонное решение $u(t,\ \boldsymbol{x})$ стационарно, т. е. удовлетворяет ур-ниям

$$\frac{\delta V}{\delta\dot\varphi}=0,\quad \frac{\delta V}{\delta\varphi}=0, \tag{6}$$

где V—аддитивный функционал вида (4), для достаточно быстро убывающих на пространственной бесконечности солитонных конфигураций с асимптотикой типа $|\nabla u|=O(r^{-\alpha-D/2})$, $\alpha>0$, $r=|\boldsymbol{x}|$, вторая вариация $\delta^2 V[u]$ при $D\geqslant 2$ знакопеременна в стандартной метрике $d=\|\varphi-u\|_B$, напр. в метрике $L_2(\mathbb{R}^D)$ (т. н. обобщённая теорема Хобарта—Деррика).

Вышесказанное означает, что если ограничиться аддитивными функционалами Ляпунова (4), то возможно существование только условно-устойчивых многомерных стационарных солитонов, т. е. устойчивых лишь при нек-рых ограничениях на нач. возмущения ξ_0. Такие ограничения возникают естественно для случая *топологических солитонов*, наделённых тождественно сохраняющимися интегральными характеристиками—*топологическими зарядами*, учёт к-рых упрощает анализ устойчивости. В связи с этим ограничимся распространённым случаем нетопологич. солитонов, для к-рых естественной оказывается орбитальная устойчивость.

Известно, что любые условия на возмущения можно ввести в определение метрики ρ, хотя это и приводит к усложнению анализа. Для описания условной устойчивости множества U стационарных решений удобно выделить какое-то одно из них u (или нек-рое их подмножество, задаваемое параметрами $\boldsymbol{\omega}$), а все остальные рассматривать как порождённые им в результате действия преобразований из группы G инвариантности ур-ния (1). Пусть G_0—группа инвариантности функционала V в (4) и (6) с параметрами $\boldsymbol{\alpha}_0$, являющаяся подгруппой группы G с параметрами $\boldsymbol{\alpha}=\{\boldsymbol{\alpha}_0,\ \boldsymbol{\beta}\}$, где $\boldsymbol{\beta}$—дополнит. параметры. В общем случае стационарное решение зависит как от групповых, $\boldsymbol{\alpha}$, так и негрупповых, $\boldsymbol{\omega}$, параметров, т. е. $u=u(t,\ \boldsymbol{x}|\boldsymbol{\alpha},\ \boldsymbol{\omega})\subset U$. При этом стационарные решения ур-ний (6) отвечают выбору $\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\beta}_0$ и образуют подмножество $U_0\subset U$. Множество стационарных решений, отвечающее фиксированным параметрам $\boldsymbol{\beta}_0$, $\boldsymbol{\omega}=\boldsymbol{\omega}_0$, обозначим $U_\omega\subset U_0$. Солитонную конфигурацию будем называть возмущённой, если $\varphi\notin U$.

При изучении орбитальной устойчивости естественно определить следующие метрики, задавшись нек-рой банаховой нормой $d=\|\varphi-u\|_B$:

$$\rho_1=\inf_{\alpha_0} d,\quad \rho_2=\inf_{\alpha} d,\quad \rho_3=\inf_{\alpha,\omega} d. \tag{7}$$

Однако осуществляя в (7) минимизацию по параметрам решения u, убеждаемся, что они становятся ф-циями времени, и поэтому предельная ф-ция $u\,[t,\ \boldsymbol{x}|\boldsymbol{\alpha}(t),\ \omega(t)]$ в общем случае может не быть решением ур-ний движения. Это приводит к непривычному для физиков образу солитона с «плавающими» параметрами («солитона—моллюска»), что инициировало поиски альтернативного описания. Чтобы преодолеть это затруднение, заметим, что одной из мотиваций выбора метрик (7) было запрещение нулевых мод $\varphi_{\alpha_0}=\hat{A}_{\alpha_0}u$ (где $\hat{A}_{\alpha_0}$—*генераторы группы*), отвечающих сдвигам по групповым параметрам и обращающих в нуль $\delta^2 V$. В самом деле, для $\varphi\in U_\omega$ из (7) следует, что $\rho_1=0$. Но последнего можно добиться и более простым способом. Напр., можно рассматривать пространство допустимых возмущений ξ как подпространство гильбертова пространства со скалярным произведением (,), выделенное условиями $(\xi,\ \varphi_{\alpha_0})=0$. Др. путь состоит в том, чтобы выбрать нек-рый достаточно удалённый момент времени $t=T$ и «остановить» возмущённый солитон, совершив подходящее групповое преобразование $\varphi\to\varphi_g$, $d\to d_g$, а затем осуществить минимизацию метрики d_g по $u\in U_\omega$ (или $u\in U_0$) и $g\in G$. Это определит параметры $\boldsymbol{\alpha}(T)$ и соответствующую метрику $d_g=\|\varphi_g-u\|_B$. В зависимости от выбора множества U_ω или U_0 получаются разные метрики [при фиксированных параметрах $\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}(T)$]:

$$\rho=\inf_{U_\omega} d_g,\quad \rho'=\inf_{U_0} d_g.$$

Практически же указанная процедура исключения нулевых мод осуществляется путём фиксации набора интегралов движения Q_i (обобщённых зарядов) типа импульса $\boldsymbol{P}$, момента импульса $\boldsymbol{L}$, числа частиц N, электрич. заряда Q и др. Устойчивость при фиксированных обобщённых зарядах Q_i получила назв. Q-устойчивости. Для наиб. распространённого случая, когда система обладает единственным зарядом Q, справедлива т. н. Q-теорема.

2. **Q-теорема.** Рассмотрим простой для анализа случай, когда солитон описывается комплексным скалярным полем ψ в четырёхмерном пространстве-времени Минковского. Пусть невозмущённое решение ур-ний движения имеет вид

$$\psi_0=u(r)\exp(-i\omega t),\quad u^*=u,\quad r\in\mathbb{R}^3, \tag{8}$$

где ф-ция u достаточно быстро убывает при $r\to\infty$. Рассмотрим класс моделей, удовлетворяющих требованиям релятивистской и $U(1)$-инвариантностей (для $g\in U(1)$ $\psi_g=e^{i\gamma}\psi$) и задаваемых лагранжевой плотностью вида

$$L=-F(p,\ q,\ s).$$

Здесь введены релятивистские инварианты

$$p=-\partial_\mu\psi^*\partial^\mu\psi,\quad q=j_\mu j^\mu,\quad s=\psi^*\psi,\quad \mu=0,\ 1,\ 2,\ 3,$$

где $j_\mu=(i/2)\psi^*\overleftrightarrow{\partial}_\mu\psi$. Построим также инвариантное множество U_0 невозмущённых солитонных решений, представляющее собой совокупность орбит группы $G_0=[T(3)\boxtimes SO(3)]\otimes U(1)$, включающей пространственные сдвиги, повороты и фазовые преобразования. Иными словами,