$$\sigma_{11}l_1+\sigma_{12}l_2+\sigma_{13}l_3=F_x,$$
$$\sigma_{21}l_1+\sigma_{22}l_2+\sigma_{23}l_3=F_y, \qquad (5)$$
$$\sigma_{31}l_1+\sigma_{32}l_2+\sigma_{33}l_3=F_z;$$
$$u_x=\varphi_x, \quad u_y=\varphi_y, \quad u_z=\varphi_z, \qquad (6)$$

где l_1, l_2, l_3 — косинусы углов между нормалью к поверхности и координатными осями. Первые условия означают, что искомые напряжения должны удовлетворять на границе S_1 трём равенствам (5), а вторые — что искомые перемещения должны удовлетворять на границе S_2 равенствам (6); в частном случае может быть $\varphi_x=\varphi_y=\varphi_z=0$ (часть S_2 поверхности жёстко закреплена). Напр., в задаче о равновесии плотины массовая сила — сила тяжести, поверхность S_2 подошвы плотины неподвижна, на остальную поверхность S_1 действуют силы напора воды, давления разл. надстроек, транспортных средств и т. д.

В общем случае поставленная задача представляет собой пространственную задачу У. т., решение к-рой трудно осуществимо. Точные аналитические решения имеются лишь для нек-рых частных задач: об изгибе и кручении бруса, о контактном взаимодействии двух тел, о концентрации напряжений, о действии силы на вершину конич. тела и др. Так как ур-ния У. т. являются линейными, то решение задачи о совместном действии двух систем сил получается путём суммирования решений для каждой из систем сил, действующих раздельно (принцип суперпозиции). В частности, если для к.-н. тела найдено решение при действии сосредоточенной силы в к.-л. произвольной точке тела, то решение задачи при произвольном распределении нагрузок получается путём суммирования (интегрирования). Такие решения получены лишь для небольшого числа тел (неограниченное пространство, полупространство, ограниченное плоскостью, и нек-рые др.). Предложен ряд аналитич. методов решения пространственной задачи У. т.: вариац. методы (Ритца, Бубнова — Галёркина, Кастильяно и др.), метод упругих потенциалов, метод Бетти и др. Интенсивно разрабатываются численные методы (конечно-разностные, метод конечных элементов и др.). Разработка общих методов решений пространственной задачи У. т. — одна из наиб. актуальных проблем У. т.

При решении плоских задач У. т. (когда один из компонентов перемещения равен нулю, а два других зависят только от двух координат) широкое применение находят методы теории ф-ций комплексного переменного. Для стержней, пластин и оболочек, часто используемых в технике, найдены приближённые решения многих практически важных задач на основе нек-рых упрощающих предположений. Применительно к этим объектам интерес представляют задачи об устойчивости равновесия (см. *Устойчивость движения*).

В задаче термоупругости определяются напряжения и деформации, возникающие вследствие неоднородного распределения темп-ры в теле. При матем. постановке этой задачи в правую часть первых трёх ур-ний (1) добавляется член $-(3\lambda+2\mu)\alpha T$, где α — коэф. линейного температурного расширения, $T(x_1, x_2, x_3)$ — заданное поле темп-ры. Аналогичным образом строится теория электромагнитоупругости и упругости тел, подвергаемых облучению.

Большой практич. интерес представляют задачи У. т. для неоднородных тел. В этих задачах коэф. λ и μ в ур-ниях (1) являются не константами, а ф-циями координат, определяющими поле упругих свойств тела, к-рое иногда задают статистически (в виде нек-рых ф-ций распределения). Применительно к этим задачам разрабатываются статистич. методы У. т., отражающие статистич. природу свойств поликристаллич. тел и нагрузок.

В динамич. задачах У. т. искомые величины — ф-ции координат и времени. Исходными для матем. решения этих задач являются дифференц. ур-ния движения, отличающиеся от ур-ний (3) тем, что правые части вместо нуля содержат инерц. члены $\rho\partial^2 u_x/\partial t^2$ и т. д. К исходным ур-ниям должны также присоединиться ур-ния (1), (4) и, кроме граничных условий (5), (6), ещё задаваться нач. условия, определяющие, напр., распределение перемещений и скоростей частиц тела в нач. момент времени. К этому типу относятся задачи о колебаниях конструкций и сооружений, в к-рых могут определяться формы колебаний и их возможные смены, амплитуды колебаний и их нарастание или убывание во времени, резонансные режимы, динамич. напряжения, методы возбуждения и гашения колебаний и др., а также задачи о распространении упругих волн (сейсмич. волны и их воздействие на конструкции и сооружения; волны, возникающие при взрывах и ударах; термоупругие волны и т. д.).

Одними из совр. проблем У. т. являются матем. постановка задач и разработка методов их решения при конечных (больших) упругих деформациях.

Эксперим. методы У. т. (метод многоточечного тензометрирования, *поляризационно-оптический метод* исследования напряжений, метод муаров и др.) позволяют в нек-рых случаях непосредственно определить распределение напряжений и деформаций в исследуемом объекте или на его поверхности. Эти методы используются также для контроля решений, полученных аналитич. и численным методами, особенно когда решения найдены при к.-н. упрощающих допущениях. Иногда эффективными оказываются экспериментально-теоретич. методы, в к-рых частичная информация об искомых ф-циях получается из опытов.

Лит.: Ляв А. (Лав), Математическая теория упругости, пер. с англ., М.—Л., 1935; Стретт Дж. В. (лорд Рэлей), Теория звука, пер. с англ., 2 изд., т. 1—2, М., 1955; Боли Б., Уэйнер Дж., Теория температурных напряжений, пер. с англ., М., 1964; Трехмерные задачи математической теории упругости и термоупругости, под ред. В. Д. Купрадзе, 2 изд., М., 1976; Тимошенко С. П., Гудьер Дж., Теория упругости, пер. с англ., 2 изд., М., 1979; Хан Х., Теория упругости. Основы линейной теории и её применение, пер. с нем., М., 1988. *А. А. Ильюшин, В. С. Ленский.*

УПРУ́ГОСТЬ — свойство тел изменять форму и размеры под действием нагрузок и самопроизвольно восстанавливать исходную конфигурацию при прекращении внеш. воздействий.

Количественно У. выражается в том, что компоненты тензора напряжений (см. *Напряжение механическое*) в изотермич. условиях являются ф-циями компонентов тензора деформации (см. *Деформация*), к-рые универсальны для данного материала и не зависят от того, в каком порядке происходит изменение разл. компонентов деформации до достижения ими рассматриваемых значений. В большинстве материалов (напр., в металлах, керамике, горных породах, древесине) при малых деформациях зависимости между напряжениями и деформациями можно считать линейными и описывать обобщённым *Гука законом*. Законам нелинейной У. можно придать форму, подобную обобщённому закону Гука, заменив модули упругости нек-рыми универсальными ф-циями (см. *Упругости теория*).

У. тел обусловлена силами взаимодействия атомов, из к-рых они построены. В твёрдых телах при темп-ре абс. нуля в отсутствие внеш. напряжений атомы занимают равновесные положения, в к-рых сумма всех сил, действующих на каждый атом со стороны остальных, равна нулю, а потенц. энергия атома минимальна. Кроме сил притяжения и отталкивания, зависящих только от расстояния между атомами (центральные силы), в многоатомных молекулах и макроскопич. телах действуют также нецентральные силы, зависящие от т. н. валентных углов между прямыми, соединяющими данный атом с его разл. соседями (рис.). При равновесных значениях валентных углов нецентральные силы также уравновешены. Энергия макроскопич. тела зависит от межатомных расстояний и валентных углов, принимая мин. значение при равновесных значениях этих параметров.

Под действием внеш. напряжений атомы смещаются из своих равновесных положений, что сопровождается увеличением потенц. энергии тела на величину, равную работе внеш. напряжений по изменению объёма и формы тела. После снятия внеш. напряжений конфигурация упруго деформир. тела с неравновесными межатомными расстояниями и валентными углами оказывается неустойчивой и са-