Уравнение Янга — Бакстера. Изотропная модель Гейзенберга является простейшей системой, точное решение к-рой достигается методом анзатца Бете, т. е. представлением волновой ф-ции в виде (3) и (4). Для этой модели рассматривается система взаимодействующих частиц (спиновых отклонений), к-рые не имеют внутр. структуры, и их состояние целиком задаётся их положением в цепочке (координатой); взаимодействие таких частиц сводится лишь к обмену импульсами. В то же время существует немало физ. задач, где состояние отражает и внутр. структуру частиц, т. е. характеризуется нек-рым дискретным индексом α, напр. проекцией спина. При взаимодействии друг с другом такие частицы могут не только обмениваться импульсами, но и менять свой дискретный индекс. Это обстоятельство требует обобщения анзатца Бете.

Рассмотрим систему из N частиц. Пусть $Q=(q_1,\dots,q_N)$ и $P=(p_1,\dots,p_N)$ — перестановки целых чисел $1, \dots, N$. Обобщённый анзатц Бете состоит в том, что волновая ф-ция системы $\Phi_{\alpha_1,\dots,\alpha_N}(x_1,\dots,x_N)$ для области

$$X_Q=\{x_{q_1}<x_{q_2}<\dots<x_{q_N}\}$$

взаимной расстановки координат частиц имеет вид

$$\Phi_{\alpha_1,\dots,\alpha_N}(x_1,\dots,x_N)=\sum_P A_{\alpha_1,\dots,\alpha_N}(Q\,|\,P)\exp\left\{i\sum_{j=1}^{N} p_{Pj}x_j\right\}. \quad (8)$$

Ф-ции $A(Q\,|\,P)$ разл. областей связаны между собой через S-матрицу. Если области X_Q и $X_{\tilde{Q}}$ отличаются друг от друга перестановкой i и j частиц, то эту связь в общем виде можно записать в виде соотношения

$$A_{\dots\alpha_i\dots\alpha_j\dots}(\tilde{Q}\,|\,P)=\sum_{\alpha'_i\alpha'_j} S^{\alpha_i\alpha'_i}_{\alpha_j\alpha'_j}(p_i,p_j)A_{\dots\alpha'_i\dots\alpha'_j}(Q\,|\,P). \quad (9)$$

Величина $S^{\alpha_i\alpha'_i}_{\alpha_j\alpha'_j}(p_i,p_j)$ наз. двухчастичной *матрицей рассеяния.* Используя многократно правило (9) для перестановки одной пары частиц, мы можем любую перестановку свести к тождественной перестановке $X_I=\{x_1<x_2<\dots<x_N\}$. Коэф. $A(Q\,|\,P)$ и $A(I\,|\,P)$ будут связаны соотношением, в к-ром стоит произведение S-матриц, отвечающих всем транспозициям пары индексов, к-рые нужно сделать для сведения перестановки $\tilde{Q}$ к I. Т. о. возникает многочастичная матрица рассеяния, к-рая оказывается мультипликативной.

Между элементами двухчастичной матрицы рассеяния существует соотношение, играющее центр. роль в теории квантовых одномерных систем. Это соотношение следует из эквивалентности двух возможностей трёхчастичного процесса рассеяния. Используя такую параметризацию импульсов $p_i=p_i(\lambda_i)$, при к-рой матрица рассеяния $S(p_1,p_2)$ будет ф-цией разности б ы с т р о т λ_1 и λ_2, $S(\lambda_1-\lambda_2)$, соотношение для факторизованной трёхчастичной матрицы можно записать в виде

$$S^{\alpha_1\alpha'_1}_{\alpha_2\alpha'_2}(\lambda)S^{\alpha'_1\alpha''_1}_{\alpha_3\alpha'_3}(\lambda+\mu)S^{\alpha'_2\alpha''_2}_{\alpha'_3\alpha''_3}(\mu)=$$

$$=S^{\alpha_2\alpha'_2}_{\alpha_3\alpha'_3}(\mu)S^{\alpha_1\alpha'_1}_{\alpha'_3\alpha''_3}(\lambda+\mu)S^{\alpha'_1\alpha''_1}_{\alpha'_2\alpha''_2}(\lambda) \quad (10)$$

(по повторяющимся индексам подразумевается суммирование). Подобного типа соотношения при точном решении конкретных одномерных задач были получены в 1967 Ч. Янгом [4] и в 1972 Бакстером и наз. у р а в н е н и я м и Я н г а — Б а к с т е р а, а параметр λ (или μ) наз. с п е к т р а л ь н ы м п а р а м е т р о м.

Квантовый метод обратной задачи. В этом методе одним из центральных объектов является т р а н с ф е р - м а т р и ц а T. Она определяется следующим образом:

$$T^{\alpha_1\dots\alpha_N}_{\beta_1\dots\beta_N}(\lambda)=\sum_{\gamma_1\dots\gamma_N} S^{\gamma_1\gamma_2}_{\alpha_1\beta_1}(\lambda)\times$$

$$\times S^{\gamma_2\gamma_3}_{\alpha_2\beta_2}(\lambda)\dots S^{\gamma_N\gamma_1}_{\alpha_N\beta_N}(\lambda), \quad (11)$$

где α_i и β_i $(1\leqslant i\leqslant N)$ — два набора чисел, каждый из к-рых может пробегать все l значений дискретного индекса α (или β). Такая искусств. конструкция T-матрицы размерности l^N полезна тем, что проблема диагонализации гамильтониана задачи сводится к отысканию собств. значений этой матрицы, что может представить выполнимую задачу.

Запишем трансфер-матрицу в инвариантной форме, перейдя от S-матрицы размерности l к нек-рой $\mathscr{L}$-матрице размерности l^{N+1}, следующим образом:

$$\mathscr{L}_{\xi n}(\lambda)^{\gamma_\xi\alpha_1\dots\alpha_N}_{\gamma'_\xi\beta_1\dots\beta_N}=S^{\gamma_\xi\gamma'_\xi}_{\alpha_n\beta_n}(\lambda)\,\delta_{\alpha_1\beta_1}\dots\delta_{\alpha_{n-1}\beta_{n-1}}\times$$

$$\times\delta_{\alpha_{n+1}\beta_{n+1}}\dots\delta_{\alpha_N\beta_N}. \quad (12)$$

В многомерном пространстве эта матрица диагональна по всем индексам α_i, β_i, кроме $i=n$. Выражение для T-матрицы в таком случае записывается в виде следа от произведения $\mathscr{L}$-матриц, взятого только по вспомогат. матричным индексам γ_ξ и γ'_ξ:

$$T^{\alpha_1\dots\alpha_N}_{\beta_1\dots\beta_N}(\lambda)=\{\mathrm{Tr}_\xi\mathscr{L}_{\xi 1}(\lambda)\,\mathscr{L}_{\xi 2}(\lambda)\dots\mathscr{L}_{\xi N}(\lambda)\}^{\alpha_1\dots\alpha_N}_{\beta_1\dots\beta_N}. \quad (13)$$

В операторной форме

$$T(\lambda)=\mathrm{Tr}_\xi\mathscr{T}_\xi(\lambda),$$

где

$$\mathscr{T}_\xi(\lambda)=\mathscr{L}_{\xi 1}(\lambda)\,\mathscr{L}_{\xi 2}(\lambda)\dots\mathscr{L}_{\xi N}(\lambda) \quad (14)$$

наз. м а т р и ц е й м о н о д р о м и и; её размерность равна l^{N+1}.

Соотношение (10) для S-матриц можно переписать в терминах $\mathscr{L}$-матриц, вводя матрицу $\mathscr{L}_{\xi\eta}$ ф-лой

$$\mathscr{L}_{\xi\eta}(\lambda)^{\gamma_\xi\gamma_\eta}_{\gamma'_\xi\gamma'_\eta}(\lambda)\equiv S^{\gamma_\xi\gamma'_\xi}_{\gamma_\eta\gamma'_\eta}(\lambda).$$

Тогда имеет место следующее ур-ние:

$$\mathscr{L}_{\xi\eta}(\lambda)\,\mathscr{L}_{\xi n}(\lambda+\mu)\,\mathscr{L}_{\eta n}(\mu)=\mathscr{L}_{\eta n}(\mu)\,\mathscr{L}_{\xi n}(\lambda-\mu)\,\mathscr{L}_{\xi\eta}(\lambda). \quad (15)$$

Отсюда следует аналогичное ур-ние для матрицы монодромии:

$$\mathscr{L}_{\xi\eta}(\lambda-\mu)\,\mathscr{T}_\xi(\lambda)\,\mathscr{T}_\eta(\mu)=\mathscr{T}_\eta(\mu)\,\mathscr{T}_\xi(\lambda)\,\mathscr{L}_{\xi\eta}(\lambda-\mu). \quad (16)$$

Ур-ния (15) и (16) удобно переписать в др. форме, если подействовать на них оператором перестановки $P_{\xi\eta}$ индексов ξ и η:

$$R(\lambda-\mu)(\mathscr{L}_n(\lambda)\otimes\mathscr{L}_n(\mu))=(\mathscr{L}_n(\mu)\otimes\mathscr{L}_n(\lambda))\,R(\lambda-\mu), \quad (17)$$

$$R(\lambda-\mu)(\mathscr{T}(\lambda)\otimes\mathscr{T}(\mu))=(\mathscr{T}(\mu)\otimes\mathscr{T}(\lambda))\,R(\lambda-\mu), \quad (18)$$

где введена $R(\lambda)$-матрица размерности l^2,

$$R(\lambda)=P_{\xi\eta}\mathscr{L}_{\xi\eta}(\lambda), \quad (19)$$

и символ тензорного произведения $\otimes$. Все ур-ния (15) — (18) также наз. ур-ниями Янга — Бакстера. Для ранее введённых T-матрицы и матрицы монодромии также справедливы ур-ния Янга — Бакстера. Дальнейшая программа состоит в том, чтобы установить связь этих матриц с гамильтонианом системы и провести их диагонализацию. Эта программа и составляет содержание КМОЗ и может быть фактически реализована только для конкретной системы. Проиллюстрируем технику КМОЗ на примере анизотропной гейзенберговской цепочки (XYZ-модели).

Для исследования системы с гамильтонианом (1) выберем в качестве двухчастичной матрицы рассеяния выражение

$$S^{\gamma\gamma'}_{\alpha\alpha'}(\lambda)=\sum_{j=0}^{3} w_j(\lambda)\,\sigma^j_{\gamma\gamma'}\,\sigma^j_{\alpha\alpha'}\ (j=x,\ y,\ z) \quad (20)$$

с разл. величинами w_j (суммирование по j ведётся по четырём индексам: $j=x$, y, z и 0, причём σ^0 представляет собой единичную двухрядную матрицу). Матричная запись S-матрицы будет следующей: