Идеи и методы Т. многообразий в ряде случаев удаётся применить к изучению функциональных пространств, рассматривая их как бесконечномерные многообразия. Важнейшими примерами являются пространство путей с фиксированными концами, расположенных на данном многообразии M^n, а также пространство петель (замкнутых кривых) на M^n. Т. пространства путей и пространства петель на многообразии M^n оказывается тесно связанной с Т. многообразия M^n. Это обстоятельство исключительно важно для решения задач вариационного исчисления в целом (см. ниже).

Ещё один важный класс топологич. пространств — комплексы, к-рые возникают как обобщения многогранников. Т. комплексов является тем самым комбинаторной версией Т. многообразий (хотя и находится с ней в тесных взаимоотношениях). Подобно тому как многообразия склеиваются из областей евклидова пространства, симплициальные комплексы склеиваются из симплексов — отрезков, треугольников и их многомерных обобщений. n-мерный симплекс определяется как выпуклая оболочка $n+1$ точек $x_0, x_1, ..., x_n$ в n-мерном пространстве, не лежащих в одной n-мерной плоскости, т. е. совокупность точек вида

$$x=\sum_{i=0}^{n} t_i x_i,\ t_i \geqslant 0,\ \sum_{i=0}^{n} t_i = 1.$$

Грани такого симплекса получаются приравниванием нулю части координат $t_0, t_1, ..., t_n$. Симплициальным комплексом K наз. совокупность симплексов, удовлетворяющая след. двум требованиям: 1) вместе с каждым симплексом в комплексе содержатся все его грани; 2) любые два симплекса или не имеют общих точек, или пересекаются по целой грани. Напр., одномерный комплекс — это граф. Комплекс K является топологич. пространством: открытыми являются те подмножества точек в K, пересечение к-рых с каждым симплексом открыто. Подразделением комплекса K наз. новый комплекс, получающийся из K разбиением каждой его грани на более мелкие части, превращающие саму эту грань в симплициальный комплекс. Числовые или алгебраич. характеристики топологич. свойств комплексов по определению должны совпадать для исходного и подразделённого комплексов, т. е. являться комбинаторными инвариантами. Большинство (но не все — см. [3]) комбинаторных инвариантов комплексов, напр. эйлерова характеристика

$$\chi(K)=\sum_k(-1)^k c_k,$$

где c_k — число k-мерных симплексов комплекса K, являются топологическими и даже гомотопическими инвариантами.

Кубические комплексы определяются аналогично симплициальным, но вместо симплексов берутся кубы всех размерностей. Особый интерес такие комплексы вызывают потому, что евклидовы пространства допускают правильное разбиение на кубы (решётка). Связанные с кубич. комплексами топологич. задачи возникают поэтому при изучении моделей статистич. физики [9]. При вычислении нек-рых гомотопич. инвариантов пространств (напр., гомологий и гомотопических групп — см. ниже) используются также клеточные комплексы [3].

При изучении топологич. свойств методами алгебраической Т. каждому (достаточно хорошему) пространству сопоставляется алгебраич. характеристика — линейное пространство, группа, кольцо и пр., причём это сопоставление (функтор) должно обладать свойством естественности или ковариантности: отображениям топологич. пространств сопоставляются алгебраич. отображения (гомоморфизмы — см. *Группа*) их алгебраич. характеристик. Простейшим примером является фундаментальная группа пространства. Элементами фундаментальной группы $\pi_1(X, x_0)$ пространства X с отмеченной точкой x_0 являются гомотопические классы петель — замкнутых путей с началом и концом в точке x_0 (в процессе гомотопии начало и конец пути должны оставаться в точке x_0). Произведение путей определяется как их последовательное прохождение, а единичный элемент — постоянное отображение в точку x_0. Эта группа, вообще говоря, некоммутативна. При изменении отмеченной точки x_0 в связном пространстве X группа $\pi_1(X, x_0)$ заменяется на изоморфную. Непрерывное отображение f: $X\to Y$ пространств X, Y с отмеченными точками x_0, y_0 ($f(x_0)=y_0$) индуцирует гомоморфизм фундам. групп f: $\pi_1(X, x_0)\to\pi_1(Y, y_0)$ (ковариантность), не меняющийся при гомотопиях отображения f. Отсюда уже вытекает, что фундам. группа является гомотопическим инвариантом связного пространства. Поэтому для стягиваемого пространства — прямой, плоскости, евклидова пространства, дерева (графа без циклов) и др. — фундам. группа тривиальна, т. е. состоит только из единичного элемента. Пространства с тривиальной фундам. группой наз. односвязными. Односвязной является также сфера, евклидово пространство с набором выколотых точек и др. Простейший пример неодносвязного пространства — окружность S^1 (ей гомотопически эквивалентна плоскость с выколотой точкой): $\pi_1(S^1)=\mathbb{Z}$ (группа целых чисел). [Если задать петлю на S^1 функцией $f(t)$, удовлетворяющей условию $f(t+1)=f(t)+2\pi k$, то целое число k и будет единственным топологич. зарядом этой петли.] Примерами пространств с неабелевой фундам. группой являются плоскость с $n\geqslant 2$ выколотыми точками, а также поверхности рода $g\geqslant 2$. Для проективных пространств группа $\pi_1(\mathbf{RP}^n)$ состоит из двух элементов $+1$, -1. [Если задать петлю на RP^n не обращающейся в нуль вектор-функцией $(u^0(t), u^1(t), ..., u^n(t))$, причём $u^i(t+1)=\lambda u^i(t)$, $i=0, 1, ..., n$, то соответствующий элемент ± 1 фундам. группы совпадает со знаком λ.]

Аналогично определяются высшие гомотопич. группы $\pi_k(X, x_0)$. Их элементами являются гомотопич. классы отображений k-мерной сферы (с отмеченной точкой) в X. Эти группы при $k\geqslant 2$ абелевы. Особенно важны гомотопич. группы сфер $\pi_k(S^n)$, нетривиальные при $k\geqslant n$. Известно, напр., что $\pi_n(S^n)=\mathbb{Z}$ [топологич. заряд — степень отображения (5)], $\pi_3(S^2)=\mathbb{Z}$ [топологич. заряд — инвариант Хопфа (6)]. До настоящего времени при всех k, n группы $\pi_k(S^n)$ не вычислены. (Таблицу известных гомотопич. групп сфер см. в [2].)

Более простыми топологическими (и гомотопическими) характеристиками являются гомологии и когомологии пространств. Проще всего определить когомологии многообразий. Элементами k-й группы (и даже линейного пространства) когомологий $H^k(M; \mathbb{R})$ являются классы эквивалентности замкнутых дифференц. k-форм, $\omega=\sum_{i_1<...<i_k}\omega_{i_1...i_k}(x)\,dx^{i_1}\wedge...\wedge dx^{i_k}$, $d\omega=0$, на многообразии M, рассматриваемых с точностью до точных форм: $\omega\sim\omega'$, если $\omega-\omega'=d\sigma$, где σ — $(k-1)$-форма. Размерность пространства $H^k(M; \mathbb{R})$ наз. k-м числом Бетти $b_k=b_k(M)$. Известно, что b_0 равно числу связных компонент M, сумма $b_0-b_1+b_2-...$ равна эйлеровой характеристике M. Если многообразие M^n n-мерно, то $b_k(M^n)=0$ при $k>n$; для замкнутых ориентируемых многообразий имеет место двойственность Пуанкаре: $b_k(M^n)=b_{n-k}(M^n)$. Напр., для n-мерной сферы $b_0=b_n=1$, остальные числа Бетти нулевые. Для стягиваемых M в силу гомотопич. инвариантности когомологии тривиальны: $b_k=0$ при $k>0$. Тем самым, в частности, из замкнутости $d\omega=0$ формы ω вытекает существование локальной формы σ, такой, что $\omega=d\sigma$ (утверждение, обобщающее условия потенциальности или соленоидальности векторных полей).

Элементами k-мерной группы гомологий $H_k(M; \mathbb{Z})$ пространства M, говоря наглядно, являются k-мерные циклы (или, иначе, ориентированные замкнутые k-мерные плёнки) в M и их формальные линейные комбинации с целыми коэффициентами. При этом два цикла считаются эквивалентными (гомологичными), если они служат границей $(k+1)$-мерной плёнки (рис. 6, для $k=1$). Для строгого определения групп гомологий приходится заменять пространство M на гомотопически эквивалентный ему комплекс [3]. Примеры: для поверхностей M^2 рода g имеем: $H_0(M^2; \mathbb{Z})=H_2(M^2; \mathbb{Z})=\mathbb{Z}$, $H_1(M^2; \mathbb{Z})=\mathbb{Z}\oplus...\oplus\mathbb{Z}$ ($2g$ сла-