$$x^i_\alpha = x^i_\alpha(x^1_\beta, ..., x^n_\beta),\ i=1, ..., n,$$
$$x^k_\beta = x^k_\beta(x^1_\alpha, ..., x^n_\alpha),\ k=1, ..., n. \tag{3}$$

Т. в многообразии определяется так: подмножество в M^n открыто, если открыто его пересечение с каждой картой. Дополнительно в определении многообразия требуется, чтобы пересечение любых двух карт было открыто, а также чтобы M^n было хаусдорфовым топологич. пространством. Многообразие наз. замкнутым, если оно компактно и связно. Все понятия дифференц. исчисления ф-ций многих переменных и локальной дифференц. геометрии (гладкие ф-ции и отображения, векторные и тензорные поля, дифференц. формы, римановы метрики и др.) несложно переносятся на многообразия. Многообразия M^n и N^n наз. диффеоморфными, если определены взаимообратные гладкие отображения $f: M^n \to N^n$ и $g: N^n \to M^n$. Многообразие M^n — ориентированное, если локальные координаты согласованы так, что на пересечении двух карт $\det(\partial x^i_\alpha/\partial x^k_\beta) > 0$. Если такой согласованный выбор карт на M^n невозможен (напр., на проективной плоскости), то многообразие наз. неориентируемым. Определён интеграл

$$\int_{M^n} \omega$$

дифференц. n-формы ω (см. *Дифференциальная форма*) по n-мерному замкнутому ориентированному многообразию M^n. Многообразие с краем Ω^n выделяется в n-мерном замкнутом многообразии неравенством $f(x) \leqslant 0$, где $f(x)$ — гладкая ф-ция, причём на крае $\partial\Omega^n$, где $f(x)=0$, должно выполняться условие $\operatorname{grad} f(x) \neq 0$. Край $\partial\Omega^n$ ориентированного многообразия сам является $(n-1)$-мерным ориентированным многообразием (возможно, несвязным), и для любой дифференциальной $(n-1)$-формы ω справедлива общая ф-ла Стокса

$$\int_{\partial\Omega^n} \omega = \int_{\Omega^n} d\omega, \tag{4}$$

где $d\omega$ — дифференциал формы ω (см. *Стокса теорема*).

Примерами многообразий служат поверхности в многомерных евклидовых пространствах, локально заданные неособыми системами гладких ур-ний. Хотя, в принципе, любое (с нек-рыми топологич. ограничениями, напр., компактное) многообразие может быть задано как поверхность в каком-то многомерном пространстве, ряд многообразий не задаётся в виде поверхностей. Напр., n-мерное проективное пространство $\mathbb{R}P^n$ определяется как совокупность ненулевых векторов $(u^0 : u^1 : ... : u^n)$, рассматриваемых с точностью до пропорциональности. Карты $U_0, ..., U_n$ определяются из условия $u^\alpha \neq 0$ в карте U_α. Локальные координаты $(x^1_\alpha, x^2_\alpha, ..., x^n_\alpha)$ в карте U_α имеют вид $x^i_\alpha = u^{i-1}/u^\alpha$ при $i \leqslant \alpha$, $x^i_\alpha = u^i/u^\alpha$ при $i > \alpha$. Ф-ции на $\mathbb{R}P^n$ — это однородные ф-ции $(n+1)$ переменных, $f(cu^0, cu^1, ..., cu^n) = f(u^0, u^1, ..., u^n)$, $c \neq 0$. Ещё один класс примеров — n-мерный тор T^n, получающийся факторизацией $x \sim x + k_1 e_1 + ... + k_n e_n$ пространства $\mathbb{R}^n$ по целочисленной решётке, порождённой произвольным репером $e_1, ..., e_n$ в $\mathbb{R}^n$. Ф-ции на T^n — это n-кратно периодические ф-ции n переменных: $f(x+e_i) \equiv f(x)$, $i=1, ..., n$. Др. примеры см. в [1], [2], [7]. В приложениях часто возникают также многообразия, являющиеся группами Ли и однородными пространствами. Если в определении многообразия $n=2m$ и ф-ции перехода (3), определённые в области комплексного пространства $\mathbb{C}^m$, комплексно аналитичны, то M^{2m} наз. комплексным многообразием комплексной размерности m. Примерами комплексно-одномерных многообразий являются комплексная плоскость $\mathbb{C}$, сфера Римана $\bar{\mathbb{C}}$, получающаяся из $\mathbb{C}$ добавлением бесконечно удалённой точки, а также римановы поверхности многозначных *аналитических функций*. Определены также комплексные проективные пространства $\mathbb{C}P^n$, определяемые по аналогии с $\mathbb{R}P^n$, но все координаты векторов комплексные. Комплексные алгебраические многообразия в $\mathbb{C}P^n$ локально задаются системами однородных алгебраич. ур-ний от координат $(u^0, u^1, ..., u^n)$. Напр., в разл. задачах матем. физики (см. [1], [3]) появляются поверхности типа K3; представители этого класса поверхностей задаются в $\mathbb{C}P^3$ однородными ур-ниями 4-й степени. В интегрируемых системах теории солитонов возникают абелевы многообразия — 2-мерные торы, получающиеся факторизацией пространства $\mathbb{C}^m = \mathbb{R}^{2m}$ по целочисленной решётке, порождённой векторами $e_1, ..., e_m, \tau e_1, ..., \tau e_m$, где $e_1, ..., e_m$ — базис в $\mathbb{C}^m$, а τ — линейный оператор в пространстве $\mathbb{C}^m$, задаваемый в базисе $e_1, ..., e_m$ симметрич. матрицей с положительно определённой мнимой частью.

Одной из важнейших задач Т. многообразий является задача классификации многообразий данной размерности n (напр., замкнутых) с точностью до диффеоморфности. При этом многие (хотя и не все — см. [3]) инварианты гладких многообразий оказываются топологич. и даже гомотопич. инвариантами. При $n=1$ любое замкнутое многообразие есть окружность. При $n=2$ любое замкнутое ориентированное многообразие есть поверхность нек-рого рода $g \geqslant 0$, а любое неориентированное — сфера с $h \geqslant 1$ плёнками Мёбиуса. При $n \geqslant 3$ задача классификации не решена. Ряд топологич. инвариантов замкнутых ориентированных многообразий можно получить, интегрируя подходящие комбинации, компонент *кривизны тензора* R_{ijkl} произвольной римановой метрики [обобщение ф-лы (2) для эйлеровой характеристики]. Так, напр., эйлерова характеристика 4-мерного многообразия вычисляется по ф-ле

$$\chi(M^4) = \frac{1}{32\pi^2} \int_{M^4} \varepsilon^{ijkl} \varepsilon^{abcd} R_{ijab} R_{klcd}\, d^4x,$$

где ε^{ijkl} — антисимметричный тензор 4-го ранга с $\varepsilon^{1234} = 1$, $d^4x = dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \wedge dx^4$, а 1-й класс Понтрягина — по ф-ле

$$p_1(M^4) = -\frac{1}{8\pi^2} \int_{M^4} \varepsilon^{ijkl} R^p_{qij} R^q_{pkl}\, d^4x.$$

Для построения более сложных инвариантов 3-мерных и 4-мерных многообразий привлекают идеи и методы квантовой теории поля [4], [6].

Важна также задача гомотопич. классификации отображений многообразий (все отображения и гомотопии можно считать гладкими). Напр., задача отыскания топологич. характеристик (или *топологических зарядов*) n-компонентных полей $f(x) = (f^1(x), ..., f^n(x))$, определённых на $\mathbb{R}^k$, с заданной асимптотикой на бесконечности типа $f(x) \to 0$ при $|x| \to \infty$, совпадает с задачей гомотопической классификации отображений сфер $S^k \to S^n$. Полностью решается задача классификации отображений произвольного n-мерного замкнутого ориентированного многообразия M^n в n-мерную сферу S^n. Единственным инвариантом (или топологич. зарядом) отображения f: $M^n \to S^n$, $f(x) = (y^0(x), y^1(x), ..., y^n(x))$, $(y^0)^2 + ... + (y^n)^2 = 1$, полностью определяющим его гомотопич. класс, является степень отображения — целое число $\deg f$, вычисляемое по ф-ле

$$\deg f = \sigma_n^{-1} \int_{M^n} \varepsilon_{i_0 i_1 ... i_n} y^{i_0} \frac{\partial y^{i_1}}{\partial x^1} \cdots \frac{\partial y^{i_n}}{\partial x^n}\, d^n x, \tag{5}$$

где σ_n — объём единичной n-мерной сферы. Укажем также инвариант Хопфа — целое число, полностью определяющее гомотопич. класс отображений сфер f: $S^3 \to S^2$:

$$H(f) = \int_{S^3} \omega \wedge d\omega, \tag{6}$$

где 1-форма ω на S^3 такова, что $d\omega = f^*(dS)$, dS — форма площади на S^2. (Интегральные ф-лы для топологич. зарядов отображений разл. многообразий и нек-рые их физ. приложения см. в [8].)