Особой наглядностью отличаются топологич. конструкции и задачи, возникающие при изучении кривых и поверхностей в трёхмерном пространстве. Единственным топологич. инвариантом поверхности M^2 (связной и замкнутой, т. е. без края) является её род, обозначаемый обычно через g, равный числу «дыр» на рисунке поверхности (рис. 1). [Мы не рассматриваем пока неориентируемые поверхности (см. ниже), к-рые нельзя расположить в трёхмерном пространстве без самопересечений.] Для сферы $g=0$, для тора $g=1$. Если поверхность представлена в виде многогранника, то её род может быть вычислен через эйлерову характеристику

$$\text{В}-\text{Р}+\Gamma=2-2g, \tag{1}$$

где В — число вершин, Р — число рёбер, а Г — число граней многогранника. Непрерывным вариантом этой ф-лы является ф-ла Гаусса — Бонне

$$2-2g=\frac{1}{2\pi}\iint\limits_{M^2} K dS, \tag{2}$$

где K — гауссова *кривизна* поверхности, dS — элемент площади. Если M^2 задана как *риманова поверхность* многозначной алгебраич. ф-ции $w=w(z)$, где $F(w, z)\equiv \equiv w^n+a_1(z)w^{n-1}+...+a_n(z)=0$, F — многочлен от двух переменных, то её род может быть вычислен по ф-ле Римана — Гурвица, $g=r/2-n+1$, где r — суммарная кратность точек ветвления (см. *Многозначная функция*) ф-ции $w(z)$, в к-рых происходит слияние нек-рых ветвей ф-ции $w(z)$ [если в точке ветвления z_0 после слияния остаются различными k ветвей $w_1(z_0)$, ..., $w_k(z_0)$, то кратность этой точки ветвления, по определению, равна $n-k$].

Единственный топологич. инвариант h замкнутых неориентируемых поверхностей определяется исходя из следующей их явной конструкции: нужно вырезать в поверхности сферы h отверстий и заклеить каждое из них листом Мёбиуса (важно, что его границей является окружность, рис. 2). При $h=1$ получается проективная плоскость, при $h=2$ — бутылка Клейна (рис. 3). Эйлерова характеристика такой поверхности, определяемая по аналогии с (1), равна $2-h$. Такие поверхности в трёхмерном пространстве обязательно имеют самопересечения.

Рассмотрим теперь примеры топологич. задач теории кривых. Замкнутая (гладкая) несамопересекающаяся кривая γ на плоскости всегда расположена «топологически одинаково»: она разделяет плоскость на две части — внутреннюю и внешнюю. Первые примеры топологич. величин возникают в теории ф-ций комплексного переменного: если замкнутая кривая γ лежит в области U на плоскости и ф-ция $f(z)$ комплексно-аналитична в U, то величина

$$\oint\limits_{\gamma} f(z)dz$$

не меняется при деформациях γ внутри области U.

Для зацеплений — двух несамопересекающихся и непересекающих друг друга замкнутых кривых в трёхмерном пространстве — определён топологич. инвариант их расположения — коэффициент зацепления $\{\gamma_1, \gamma_2\}$. Он равен числу витков одной кривой вокруг другой и не меняется при деформациях кривых, в процессе к-рых не происходит пересечений. Для незацепленных кривых, к-рые указанными деформациями можно растащить по разные стороны нек-рой плоскости, коэф. зацепления равен нулю. Коэф. зацепления замкнутых кривых $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_1(t)$, $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_2(t')$ вычисляется по ф-ле

$$\{\gamma_1, \gamma_2\}=\frac{1}{4\pi}\oint\limits_{\gamma_1}\oint\limits_{\gamma_2}\frac{(d\boldsymbol{r}_1,\ d\boldsymbol{r}_2, d\boldsymbol{r}_{12})}{|\boldsymbol{r}_{12}|^3}$$

[$\boldsymbol{r}_{12}=\boldsymbol{r}_1(t)-\boldsymbol{r}_2(t')$, в числителе — смешанное произведение]. Однако коэф. зацепления не несёт всей топологич. информации о взаимном расположении двух замкнутых кривых; напр., для зацепленных кривых, изображённых на рис. 4, коэф. зацепления равен нулю.

Более сложно строятся топологич. инварианты узлов — несамопересекающихся замкнутых кривых в трёхмерном пространстве $\mathbb{R}^3$ (или в трёхмерной сфере S^3, получающейся добавлением к $\mathbb{R}^3$ бесконечно удалённой точки). Два узла топологически эквивалентны, если один из них можно продеформировать в другой, причём в процессе деформации не должно возникать самопересечений. Полным топологич. инвариантом, измеряющим отличие узла от тривиального (рис. 5), является *группа* узла, совпадающая с фундам. группой (см. ниже) дополнения к узлу в S^3. (Для тривиального узла она совпадает с группой

Рис. 1. Поверхность рода $g=2$.

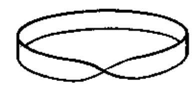

Рис. 2. Лист Мёбиуса.

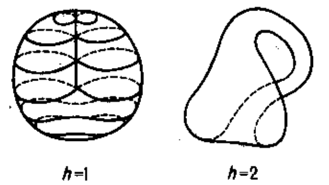

Рис. 3. Неориентируемые поверхности.

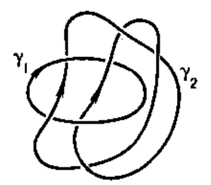

Рис. 4. Пример зацепленных кривых с коэффициентом зацепления, равным нулю.

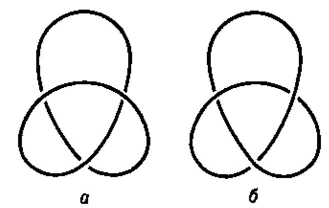

Рис. 5. Тривиальный (*а*) и нетривиальный (*б*) узлы.

целых чисел.) Однако ввиду некоммутативности группы узла (алгоритм её вычисления см. в [2]) этот инвариант непригоден, в частности для эфф. топологич. классификации узлов. Определены также более грубые инварианты узлов и зацеплений — многочлены Александера, Джонса и др., возникающие как статистич. суммы в нек-рых моделях двумерной статистич. физики. Узлы и зацепления могут быть получены посредством нек-рых отождествлений в группах кос; это позволяет строить топологич. инварианты узлов и зацеплений с помощью теории представлений групп кос, основывающейся на использовании теории R-матриц. Предпринимались попытки использования узлов и зацеплений в статистич. механике нек-рых веществ с длинными молекулами.

Многомерные обобщения большинства перечисленных наглядно-топологич. задач приводят к Т. многообразий — важнейшему разделу Т., тесно взаимодействующему с совр. матем. физикой. Множество точек M^n является n-мерным гладким *многообразием*, если оно представлено в виде объединения нек-рых своих подмножеств U_α, $\alpha=1$, 2, ... — карт, каждое из к-рых отождествлено с областью (открытым подмножеством) в пространстве $\mathbb{R}^n$. Отображения отождествления $\varphi_\alpha(x)=(x_\alpha^1, ..., x_\alpha^n)$ задают в каждом U_α локальные координаты. Требуется, чтобы на пересечении двух карт U_α и U_β координаты $(x_\alpha^1, ..., x_\alpha^n)$ выражались через координаты $(x_\beta^1, ..., x_\beta^n)$ (и обратно) при помощи гладких (т. е. непрерывно дифференцируемых достаточное число раз) функций перехода: