

узел; термин предложен Д. Финкельштейном (D. Finkelstein) в 1966] описываются решениями вида

$$\varphi_k(x, t) = 4 \operatorname{arctg} \left\{ \exp \left[\frac{\pm(x - x_0 - vt)}{\sqrt{1 - v^2}} \right] \right\} \quad (1)$$

синус-Гордона уравнения (здесь и далее $c = \hbar = 1$)

$$\frac{\partial^2 \varphi(x, t)}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \varphi(x, t)}{\partial t^2} = \sin \varphi(x, t), \quad (2)$$

где $\varphi(x, t)$ — вещественная скалярная ф-ция, знак «+» в (1) соответствует кинку (знак «-» — антикинку), находящемуся в момент времени $t=0$ в точке x_0 и движущемуся со скоростью v в направлении $+x$ (соответственно $-x$ для антикинки). Решения (1) удовлетворяют граничным условиям $\varphi(-\infty) = 0$, $\varphi(\infty) = 2\pi$ (рис. 1) и характеризуются топологич. зарядом

$$Q = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx = \frac{1}{2\pi} [\varphi(\infty) - \varphi(-\infty)],$$

равным ± 1 соответственно для кинка и антикинки. Энергия кинка (антикинки) \mathcal{E} ограничена снизу величиной топологич. заряда $\mathcal{E} > c|Q|$, где c — константа, что обеспечивает его устойчивость в отношении распада на состояния с меньшей энергией (см. *Устойчивость солитонов*).

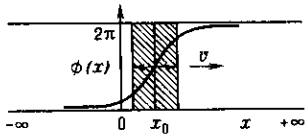


Рис. 1. Кинк уравнения синус-Гордона, локализованный в точке $x = x_0$, движущийся со скоростью v в направлении $+x$. Заштрихована область изгиба функции φ , где сосредоточена основная часть энергии кинка.

Для наглядной иллюстрации кинка синус-Гордона ур-ния рассмотрим упругую полосу, уложенную вдоль оси x и характеризующуюся в каждой точке оси углом закручивания (отклонения от равновесного положения края полосы) $\varphi(x)$ (рис. 2, а). Ф-цию $\varphi(x)$ можно задать непрерывным образом в случае полосы конечной длины $0 \leq x \leq l$, если наложить периодические граничные условия $\varphi(0) = \varphi(l) = \varphi_0 \pmod{2\pi}$, т.е. отождествить концы полосы с точностью до 2π -кратного поворота. В результате получаем замкнутую полосу. Если до отождествления концов полосы повернуть один из них на угол 2π относительно оси x (к примеру по часовой стрелке), то после замыкания полоска будет содержать «скрутку» — кинк, к-рый не может быть устранён без разрыва полосы, т.е. будет сохраняться на протяжении всей последующей эволюции полосы (рис. 2, б). Для создания в полоске 2-кинкового состояния следует повернуть один из её концов (до отождествления) на угол 4π (рис. 2, в) и т.д. Антикинк будет соответствовать закручиванию на 2π против часовой стрелки; понятно, что он будет «аннигилировать» с кинком, если их создать на одной и той же полоске.

Синус-Гордона ур-ние (2), в частности, применяется для описания распространения дислокаций в кристаллах, движения Блоха стенок в магнитоупорядоченных средах и доменных стенок в сегнетоэлектриках, распространения квантов магн. потока (флаксонов) в длинных джозефсоновских контактах (см. *Джозефсона эффект*) и т.д.

Др. примером $(1+1)$ -мерных Т.с. являются кинки т.н. φ^4 -модели с ур-нием

$$\frac{\partial^2 \varphi(x, t)}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \varphi(x, t)}{\partial x^2} = m^2 \varphi - \lambda \varphi^3, \quad (3)$$

где параметры λ , $m^2 \geq 0$. Модель простейшим образом иллюстрирует явление спонтанного нарушения симметрии. Действительно, ур-ние (3) допускает два решения-константы $\varphi = \pm m/\sqrt{\lambda}$, отвечающих нулевому уровню энергии $\mathcal{E} = 0$, к-рые переводятся друг в друга (неинварианты) при

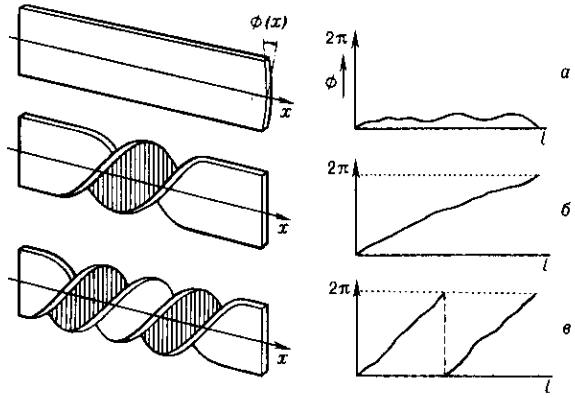


Рис. 2. Состояния полосы и отвечающие им изменения функции $\varphi(x)$: а — топологически тривиальная полоска с малыми отклонениями от равновесного положения; б — полоска, содержащая 2π -«скрутку» — кинк; в — полоска, содержащая 4π -«скрутку» — 2-кинк.

преобразованиях отражения $\varphi \rightarrow -\varphi$, в то время как ур-ние (3) и соответствующий лагранжиан инвариантны при таких отражениях. В квантовом варианте указанным постоянным решениям отвечают два вырожденных вакуумных состояния $|0\rangle$, $|0'\rangle$ (см. *Вырождение вакуума*). Выбор любого из этих вакуумов приводит к теории со спонтанно нарушенной отражательной симметрией.

Помимо постоянных решений ур-ние (3) допускает кинковое (антикинковое) статическое решение (рис. 3)

$$\varphi_{\pm}(x) = \pm \frac{m}{\sqrt{\lambda}} \operatorname{th} \left[\frac{m(x - x_0)}{\sqrt{2}} \right], \quad (4)$$

с энергией $\mathcal{E} = (2\sqrt{2}/3)m^3/\lambda$, локализованной в малой окрестности точки x_0 . При $x = \pm \infty$ решение (4) переходит в постоянные решения, а в точке обращения в нуль параметра нелинейности λ решение (4) становится сингуляр-

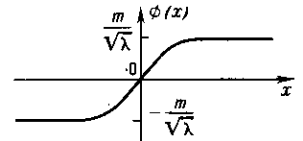


Рис. 3. Кинк φ^4 -модели, локализованный в точке $x=0$.

ным, что свидетельствует о его непертурбативном характере [т.е. решение (4) не может быть получено методами теории возмущений].

Топологический заряд φ^4 -теории записывается в виде

$$Q = \frac{\sqrt{\lambda}}{2m} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx = \frac{\sqrt{\lambda}}{2m} [\varphi(\infty) - \varphi(-\infty)],$$

при этом $Q = \pm 1$ для кинка (4) и $Q = 0$ для постоянных решений. В классич. теории это означает, что кинк не может быть непрерывным образом деформирован ни к одному из тривиальных решений (требуется бесконечная энергия для преодоления бесконечно высокого потенци. барьера). На квантовом уровне закон сохранения топологич. заряда запрещает кинку распадаться либо посредством туннельного эффекта переходить в одно из вакуумных состояний. Все это позволяет интерпретировать кинки как устойчивые частицеподобные состояния.

Следующим важным свойством φ^4 -модели является наличие в ней вырожденных состояний с пространством вырождения (см. ниже) $D = S^0$ (нульмерная сфера, состоящая, как известно, из двух точек, в данном случае $\pm m/\sqrt{\lambda}$). Это обстоятельство позволяет распространить как методы ис-