а выражение для Т. з. Q даётся ф-лой (1), т. е. для полей с граничными условиями типа

$$\alpha(|x|\to\infty)\to 0(\mathrm{mod}\, 2\pi);$$
$$\alpha(-\infty)=0;\ \alpha(\infty)=2\pi N \qquad (5)$$

Т. з. $Q=N$. Из оценки для энергии $\mathscr{E}$ синус-Гордона модели

$$\mathscr{E}=\int_{-\infty}^{\infty}dx\left\{\frac{1}{2}\left[(\partial_t\alpha)^2+(\partial_x\alpha)^2\right]+(1-\cos\alpha)\right\}\geqslant$$
$$\geqslant 2\int_{-\infty}^{\infty}dx\,|\alpha'\sin\frac{\alpha}{2}|\geqslant 8|N|,$$

где $\alpha'\equiv d\alpha/dx$, следует неравенство

$$\mathscr{E}-8|N|\geqslant\int_{-\infty}^{\infty}dx\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\alpha'-\sqrt{2}\sin\frac{\alpha}{2}\right)^2\geqslant 0,$$

означающее, что ниж. грань функционала реализуется на решениях ур-ний 1-го порядка

$$\alpha'=\pm 2\sin\frac{\alpha}{2}. \qquad (6)$$

Интегрирование ур-ний (6) приводит к единств. классу стационарных решений синус-Гордона ур-ния с $Q=\pm 1$: $\sin\frac{\alpha}{2}=\pm\mathrm{sech}\,x$, называемых **кинком** и **антикинком** соответственно. Граничные значения в (5) соответствуют тривиальному асимптотич. поведению, т. к. принадлежат $M_0=\{2\pi n;\ n=0, \pm 1,...\}$ — множеству минимумов потенциала модели $V=1-\cos\alpha$. Состояния системы классифицируются по 1-й (фундаментальной) гомотопич. группе $\pi_1(\$^1)=\mathbb{Z}$.

Ситуация с $n=d=4$ и Т. з. типа $Q=\deg(\$^3\to\$^3)$ реализуется в киральной модели бариона — *Скирма модели.* Выражение для плотности топологич. тока выписывается в соответствии с ф-лами (2) и (3):

$$J^\mu=\frac{1}{12\pi^2}\varepsilon^{\mu\nu\lambda\rho}\,\varepsilon_{ijkl}\,\varphi^i\partial_\nu\varphi^j\partial_\lambda\varphi^k\partial_\rho\varphi^l;$$
$$i, j, k, l=0, 1, 2, 3,$$

а Т. з. Q удобно представить в угловых переменных (θ, β, γ) на сфере $\$^3$, полагая

$$\varphi^0=\cos\theta;\ \varphi^1+i\varphi^2=\sin\theta\sin\beta e^{i\gamma};\ \varphi^3=\sin\theta\cos\beta,$$

где $\theta, \beta\in[0,\pi]$, $\gamma\in[0,2\pi]$, что даёт

$$Q=-\frac{1}{2\pi^2}\int d^3x\sin^2\theta\sin\beta(\nabla\theta[\nabla\beta\nabla\gamma]). \qquad (7)$$

Учёт характерной для низкоэнергетич. физики адронов *киральной симметрии* приводит к полевому многообразию $\Phi=SU(2)\simeq\$^3$, т. о. в качестве осн. средства описания удобно использовать гл. киральные поля $g(\varphi)\in SU(2)$, параметризованные мезонными полями: $g(\varphi)=\varphi_0+i(\boldsymbol{\tau\varphi})$; $\varphi_0^2+\boldsymbol{\varphi}^2=1$. Здесь τ — *Паули матрицы,* $\boldsymbol{\tau}$, $\boldsymbol{\varphi}$ — векторы в изотопич. пространстве (см. *Изотопическая инвариантность*). Поля $g(\varphi)$, подчинённые граничному условию $g\to I$, $|\boldsymbol{x}|\to\infty$, где I — единичная 2×2-матрица, осуществляют отображение $g:\mathbb{R}^3\to SU(2)$ и соответственно классифицируются по группе $\pi_3(SU(2))=\pi_3(\$^3)=\mathbb{Z}$. В оценке энергии $\mathscr{E}$ модели снизу через Т. з. (7) $\mathscr{E}>6\pi^2\sqrt{2}|Q|\varepsilon/\lambda$, где ε и λ — параметры модели, не допускается равенство, т. к. в данном случае ур-ния Богомольного не совместны с ур-ниями Эйлера — Лагранжа. Интерпретация Т. з. (7) как *барионного числа* адронов, предложенная Скирмом, подтверждается выкладками в рамках КХД [3], основанными на эффекте «поляризации дираковского моря кварков» во внеш. киральном поле $g(x)$ (см. *Квантовая хромодинамика* и развёрнутое изложение в [4]).

Ещё одна разновидность Т. з., возникающих в моделях скалярных полей с $n=3$, $d=4$, связана с др. топологич. инвариантом — индексом Хопфа и используется в моделях магнетиков [5] и модели Фаддеева [6] с полевым многообразием $\Phi=\$^2$. Выбирается триплет скалярных полей $n^a(t,\boldsymbol{x})$: $\mathbb{R}^1\times\mathbb{R}^3\to\$^2$, $a=1, 2, 3$, подчинённых условию $|\boldsymbol{n}|=1$. Индекс Хопфа определяется как число зацеплений векторных линий $\boldsymbol{B}$-поля, к-рое можно связать с $\boldsymbol{n}$-полем следующим образом:

$$\boldsymbol{B}=\mathrm{rot}\boldsymbol{A},\ f_{\mu\nu}=\partial_\mu A_\nu-\partial_\nu A_\mu=2\varepsilon_{abc}\partial_\mu n^a\partial_\nu n^b n^c; \qquad (8)$$

$b, c=1, 2, 3$. Наложением граничных условий $n^a(x)\to\delta_3^a$ при $|x|\to\infty$ пространство $\$^3$ компактифицируется в $\$^3$ и при таких отображениях прообразами двух отличных точек на «полевой» сфере $\$^2$ будут две разные B-линии на «пространственной» сфере $\$^3$, зацепляющиеся какое-то число раз. Это число и есть индекс Хопфа, обозначаемый Q_H. Рецепт вычисления Q_H основывается на том, что в силу (8) $\mathrm{div}B=0$, т. е. B-линии замкнуты, и если натянуть на одну из них ориентированную поверхность, то вторая линия должна пересечь эту поверхность ровно Q_H раз. Это приводит к следующему аналитич. выражению для Т. з. типа индекса Хопфа:

$$Q_H=-\frac{1}{(8\pi)^2}\int d^3x(AB)=\int J_H^0 d^3x,$$

где введён сохраняющийся топологич. ток

$$J_H^\mu=-\frac{1}{128\pi^2}\varepsilon^{\mu\nu\lambda\rho}f_{\nu\lambda}A_\rho;\quad \mu, \nu, \lambda, \rho=0, 1, 2, 3;$$

и соответственно n-поля классифицируются элементами 3-й гомотопич. группы $\pi_3(\$^2)=\mathbb{Z}$. Оценка для энергии $\mathscr{E}$ модели через Q_H имеет вид $\mathscr{E}>\varepsilon\lambda(4\pi^2)\sqrt{2}\,3^{3/8}|Q_H|^{3/4}$, где случай равенства исключается ввиду недостижимости ниж. грани функционала энергии.

Магнитные Т. з. возникают в моделях хиггсовского типа (см. *Хиггса поля*), имеющих разнообразные приложения в физике элементарных частиц, конденсированных сред, в астрофизике, теории сверхпроводимости и т. д. При этом $d=n+1$ и для получения конфигураций с конечными динамич. характеристиками (энергией, импульсом и т. п.) и нетривиальными Т. з. наряду со скалярными полями для $d\geqslant 3$ требуется вводить в рассмотрение *калибровочные поля* и предполагать нетривиальное асимптотич. поведение полей на пространственной бесконечности [7], [8].

Простейшая абелева модель Хиггса при $d=3$, $n=2$ включает скалярные поля $\varphi(t, x, y)=(\varphi_1, \varphi_2)$, взаимодействующие посредством $U(1)$-калибровочного поля, A_a, $a=x, y$. Магнитный Т. з. q записывается как

$$q=\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}^2}\varepsilon_{ab}A_{ba}d^2x=\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}^2}F_{xy}d^2x, \qquad (9)$$

где $F_{ab}=A_{b,a}-A_{a,b}$ — тензор напряжённости калибровочного поля, характерный для электромагнетизма. Таким образом, F_{xy} можно воспринимать как магн. поле, а второй интеграл в (9) — как суммарный магн. поток через плоскость (x, y). Условие целочисленности $q\in\mathbb{Z}$ равносильно заданию правила квантования магн. потока и выполняется при стремлении $F_{xy}\to 0$ быстрее, чем $|\boldsymbol{r}|^{-2}$ на пространственной бесконечности. В отличие от Т. з. Q в чисто скалярных полевых теориях, магнитный Т. з. определяется как степень отображения не в полевое многообразие Φ, а в множество нулей потенциала $V(\varphi)$: $M_0=\{\varphi: V(\varphi)=0\}$ — т. н. хиггсовский вакуум модели, при стремлении $|\boldsymbol{r}|\to\infty$ в любом направлении. Поскольку возможные пространственные направления в d-мерном пространстве-времени задаются единичным вектором $\{e: e^2=1\}=\$_\infty^{d-2}$, в общем случае имеем $q=\deg\{\$_\infty^{d-2}\to M_0\}$. Для потенциала $V(\varphi)=(\lambda/2)(\boldsymbol{\varphi}^2-\varphi_0^2)^2$ (φ_0 — нек-рое фиксир. значение) хиггсовский вакуум $M_0=\$^1$, т. е. $q=\deg(\$_\infty^1\to\$^1)$. Оценка энергии модели $\mathscr{E}$ через магнитный Т. з. q: $\mathscr{E}\geqslant\pi|q|$ содержит равенство, и конфигурации с мин. энергией отвечают