мент. Состояния, деформируемые друг в друга непрерывным образом, наз. эквивалентными (гомотопными) и на этом основании всё множество состояний — конфигурационное пространство системы — разбивается на классы эквивалентности (гомотопич. классы), отличающиеся значением Т. з. Q. В таком подходе последоват. состояния системы с конечной энергией описываются полями (непрерывными ф-циями) из одного и того же гомотопич. класса, с одним и тем же значением Т. з. Q_i. Переход от состояния из одного класса к состоянию из другого $(Q_i \neq Q_j)$ возможен лишь через состояние с бесконечной энергией. Иными словами, поля из разных гомотопич. классов разделены бесконечно высоким потенц. барьером. Естеств. образом возникает и закон сохранения Т. з., к-рый, в отличие от нётеровских законов сохранения (см. *Нётер теорема*), не связан с симметриями динамич. системы и выполняется не в силу ур-ний движения, а лишь вследствие топологич. свойства ф-ций состояния — их непрерывности. Отсюда и название сохраняющейся характеристики — Т. з. В классич. динамич. системах с конечным числом степеней свободы для Т. з. используется, как правило, термин «топологические интегралы движения», а в квантовом случае — «топологические квантовые числа».

В частности, топологич. интегралом движения является число частиц N в классич. динамике, где исключены процессы рождения и уничтожения частиц. Действительно, если конфигурац. пространство N частиц обозначить через C_N, то для конфигурац. пространства произвольного числа частиц справедливо представление $C = \bigcup C_N$, $N=0, 1, 2, \ldots$. Это означает, что каждая связная i-тая компонента в указанном разбиении для C характеризуется собств. числом частиц N_i и в классич. динамике отсутствуют непрерывные траектории, связывающие компоненты конфигурац. пространства с различными N_i. Наличие подобного разбиения является необходимым критерием для введения нетривиальных Т. з. Т. о., закон сохранения числа частиц в классич. динамике есть следствие непрерывности траекторий частиц, и динамич. система с числом частиц N_i, принадлежащая в нач. момент времени компоненте C_{N_i}, во все последующие моменты будет находиться в той же компоненте. Аналогичное утверждение верно и для квантовомеханич. систем, получающихся при первичном квантовании классич. системы.

Помимо разнообразных физ. интерпретаций Т. з., такого рода топологич. классификация ф-ций состояния позволяет из чисто формальных соображений существенно сузить круг поиска решений ур-ний модели. С др. стороны, при наличии оценки энергии модели $\mathscr{E}$ снизу через Т. з. Q типа $\mathscr{E} \geqslant f(Q)$, где f — монотонно растущая ф-ция, решения с нетривиальным значением Q (*топологические солитоны*), реализующие $\operatorname{Inf} \mathscr{E}$, оказываются устойчивыми по Ляпунову (см. *Устойчивость солитонов*). Более того, если ниж. грань функционала $\mathscr{E}$ достигается (случай выполнения равенства в оценке, приведённой выше), то удаётся понизить порядок вариационных ур-ний (см. *Эйлера — Лагранжа уравнение*) на единицу, т. е. свести поиск экстремалей функционала к решению ур-ний 1-го порядка, т. н. ур-ний Богомольного.

В физику Т. з. введены Т. Скирмом [1] в рамках синус-Гордона модели (см. *Синус-Гордона уравнение*). Трактовать Т. з. на языке теории гомотопий предложили Д. Финкельштейн и Ч. Мизнер [2]. Концепция Т. з. основывается на наблюдении, что в каждый фиксированный момент времени t полевые ф-ции синус-Гордона модели $\varphi(x,t)=(\varphi_1, \varphi_2)$ можно воспринимать как отображения $\varphi: \mathbb{R}^1 \to \mathbb{S}^1$, где $\mathbb{R}^1$ — пространственная ось, а $\mathbb{S}^1$ — сфера единичного радиуса (окружность) в пространстве полевых переменных, выделяемая условием $\varphi_1^2+\varphi_2^2=1$. Последнее учитывается, напр., переходом к угловой переменной: $\varphi(x,t)=\exp[i\alpha(x,t)]$, а наличие т о п о л о г и ч е с к о г о с о х р а н я ю щ е г о с я т о к а J^μ, $\mu=0, 1$, с компонентами $J^0=(2\pi)^{-1}\partial_x\alpha$, $J^1=-(2\pi)^{-1}\partial_t\alpha$ вытекает из ур-ния непрерывности. Действительно, закон сохранения топологич. тока $\partial_\mu J^\mu=0$ выполняется не в силу ур-ний движения модели (уравнения синус-Гордона) и не как следствие симметрий лагранжиана, а лишь на основании непрерывности угловой переменной $\alpha(x,t)$. Соответственно интегральная сохраняющаяся характеристика — Т. з.

$$Q=\int J^0 dx=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial\alpha}{\partial x}dx=\frac{1}{2\pi}[\alpha(\infty)-\alpha(-\infty)] \qquad (1)$$

принимает лишь целочисленные значения по числу полных обходов («намоток») поля $\alpha(x,t)$ по многообразию сферы $\mathbb{S}^1$ при пробегании аргумента x вдоль всей пространственной оси $\mathbb{R}^1$. Наложением граничных условий, $\varphi(x)\to\varphi_0$ при $|x|\to\infty$ (где φ_0 — нек-рое фиксированное значение), пространственная ось $\mathbb{R}^1$ эффективно компактифицируется, т. е. $\mathbb{R}^1 \bigcup \{\infty\}=\mathbb{S}^1$, что позволяет рассматривать Т. з. Q как степень отображения (т. н. степень Брауэра) «пространственной» сферы $\mathbb{S}^1$ в «полевую» сферу: $\mathbb{S}^1: Q=\deg(\mathbb{S}^1\to\mathbb{S}^1)$ (см. *Топология*).

При обобщении Т. з. на более реалистичные пространства высоких размерностей выделяются, как правило, две разл. реализации: модели скалярных полей с тривиальной асимптотикой и модели хиггсовского типа (скалярные плюс калибровочные поля) с нетривиальным асимптотич. поведением на бесконечности.

В моделях первого типа скалярные поля $\varphi(x)$, $x\in\mathbb{R}^d$, со значениями на нек-ром компактном *многообразии* Φ (напр., на сфере $\mathbb{S}^{n-1}$, в компактной группе G или в однородном пространстве G/H) удобно рассматривать как отображения $\varphi(x)$: $\mathbb{R}^d\to\Phi$. Так, в случае $\Phi=\mathbb{S}^{n-1}$ рассматривают n-компонентное поле, подчинённое дополнит. условию:

$$\varphi(x)=(\varphi_1,\ldots,\varphi_n): \sum_{i=1}^{n}\varphi_i^2=\langle\varphi,\varphi\rangle=1. \qquad (2)$$

Дифференцируя ур-ние «полевой» сферы (2), получают систему однородных ур-ний $\langle\partial_\mu\varphi, \varphi\rangle=0$, $\mu=1,\ldots,d$, из к-рой в случае $n\leqslant d$ следует, что $\operatorname{rank}[\partial_\mu\varphi_i]<n$, т. е. любой минор n-го порядка матрицы $[\partial\varphi]$ равен нулю. Последнее утверждение переписывается в форме закона сохранения

$$\partial_\mu(\varepsilon^{\mu\mu_2\ldots\mu_d}\varepsilon_{i_1\ldots i_n}\varphi^{i_1}\partial_{\mu_2}\varphi^{i_2}\ldots\partial_{\mu_n}\varphi^{i_n})=0 \qquad (3)$$

для n-компонентной плотности сохраняющегося топологического тока J^μ [выражение в скобках в (3), домноженное на подходящий нормировочный коэф.; $\varepsilon^{\alpha,\beta,\gamma,\ldots}$ — *Леви-Чивиты символ*]. Соответственно нормированный на целое число Т. з. для $n=d$

$$Q=\frac{1}{(n-1)!\,\Omega_{n-1}}\int_{\mathbb{R}^{n-1}}J^0(\varphi)\,dx^1\ldots dx^{n-1}, \qquad (4)$$

где $\Omega_{n-1}=2\pi^{n/2}/\Gamma(n/2)$ — площадь поверхности сферы $\mathbb{S}^{n-1}$, $\Gamma(n/2)$ — гамма-функция. Как и в случае одного измерения, естественные граничные условия $\varphi(x)\to\varphi_0$ при $|x|\to\infty$ (тривиальное асимптотич. поведение) приводят к эфф. компактификации пространства: $\mathbb{R}^{d-1}\bigcup\{\infty\}=\mathbb{S}^{d-1}$. Тогда поля $\varphi(x)$ суть отображения $\mathbb{S}^{d-1}\to\mathbb{S}^{n-1}$ (в общем случае $\mathbb{S}^{d-1}\to\Phi$) классифицируются $(d-1)$-й гомотопич. группой $\pi_{d-1}(\Phi)$, элементами к-рой являются гомотопические классы полей $\{\varphi(x)\}_i$. Возможность введения целочисленной топологич. характеристики — Т. з. Q для заданной динамич. системы — определяется наличием изоморфизма $\pi_{d-1}(\Phi)=\mathbb{Z}$, где $\mathbb{Z}$ — абелева группа целых чисел или одна из её подгрупп. Фактически Т. з. (4) является явной реализацией изоморфизма для $\Phi=\mathbb{S}^{n-1}$. Факт независимости сохранения Т. з. от динамики системы подтверждается тем, что J^0 в ф-ле (4) не зависит от канонич. импульсов: скобки Пуассона J^0 с канонич. координатами [полями $\varphi(x)$] тривиальны по определению.

Наиб. изученный пример синус-Гордона модели отвечает случаю $n=d=2$ в ф-лах (2)—(4). В терминах полей $\varphi(x)$ плотность топологич. тока записывается в виде

$$J^\mu=\frac{1}{2\pi}\varepsilon^{\mu\nu}\varepsilon_{ab}\varphi^a\partial_\nu\varphi^b, \quad \mu,\nu=0,1;\ a,b=1,2,$$