$$\frac{1}{8\pi G}\left(R_{\mu\nu}-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}R\right)=-\theta_{\mu\nu}(x), \qquad (2)$$

где $R_{\mu\nu}$ — *Риччи тензор*, $R=g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}$ — скалярная кривизна (используется система единиц, в к-рой $c=1$).

В плоском пространстве-времени *симметрия* системы относительно сдвигов (или, иначе, существование инвариантного относительно замен координат и зависящего от метрики функционала действия) приводит к локальному сохранению энергии и импульса (см. *Нётер теорема*):

$$\partial_\mu \theta^{\mu\nu}(x)=0, \qquad (3)$$

где $\partial_\mu=\partial/\partial x_\mu$.

Следствием (3) является, в частности, сохранение вектора полных энергии и импульса системы. Величина

$$P^\mu=\int\limits_{t=\mathrm{const}}\theta^{\mu 0}\,dV_t,$$

где dV_t — элемент объёма гиперповерхности пост. времени, не зависит от выбора гиперповерхности, т. е. $dP^\mu/dt=0$.

Для непрерывного распределения материи с плотностью ρ и потоком $\rho u^\mu\sqrt{g}$ ТЭИ даётся выражением

$$\theta^{\mu\nu}=\rho u^\mu u^\nu,$$

где u^μ — 4-скорость.

В *квантовой теории поля* в простейших случаях свободного *скалярного поля* (а), свободного фермионного поля (*Дирака поля*) (б) и *Янга — Миллса поля* (в) ТЭИ в стандартных обозначениях имеют вид

$$\text{а)}\ \theta^{\mu\nu}(x)=\partial^\mu\varphi\,\partial^\nu\varphi-(1/2)g^{\mu\nu}g_{\alpha\beta}\,\partial^\alpha\varphi\,\partial^\beta\varphi,$$

$$\text{б)}\ \theta^{\mu\nu}(x)=\frac{i}{2}\left[\bar\psi\left(\gamma^\mu\partial^\nu+\gamma^\nu\partial^\mu\right)\psi\right],$$

$$\text{в)}\ \theta^{\mu\nu}(x)=-(G^\mu_\alpha)^a(G^{\alpha\nu})^a+\frac{1}{4}(G^{\alpha\beta})^a(G_{\alpha\beta})^a,$$

где φ — скалярное поле, ψ — фермионное поле и $G^a_{\mu\nu}=\partial_\mu A^a_\nu-\partial_\nu A^a_\mu+f^{abc}A^b_\mu A^c_\nu$ — тензор напряжённости поля Янга — Миллса, принимающего значения в *Ли алгебре* со структурными константами f^{abc}.

Через ТЭИ также выражаются токи, связанные с др. пространственными симметриями. Тензор момента импульса $M^{\alpha\beta}_\mu$ и дилатац. ток D_μ, сохранение к-рых отвечает соответственно симметриям системы относительно глобальных вращений и растяжения, след. образом связаны с ТЭИ (1):

$$M^{\alpha\beta}_\mu=X^\alpha\theta^\beta_\mu-X^\beta\theta^\alpha_\mu,$$

$$D_\mu=X^\alpha\theta_{\alpha\mu}+\frac{\delta S}{\delta q_{,\nu}}\,g_{\nu\mu}\,d_q\,q,$$

где d_q равно разности между канонич. размерностью (см. в ст. *Аномальная размерность*) и порядком тензорного поля q. Сохранение момента импульса гарантируется симметричностью ТЭИ. Сохранение же дилатац. тока в случае, когда $d_q=0$, эквивалентно условию нулевого следа ТЭИ.

ТЭИ допускает модификации, не нарушающие условия сохранения (3). Модифицированные ТЭИ отличаются на дивергенцию антисимметричного 3-тензора:

$$\tilde\theta^{\mu\nu}=\theta^{\mu\nu}+\partial_\lambda\eta^{\lambda\mu\nu},\quad \eta^{\lambda\mu\nu}=-\eta^{\mu\lambda\nu}. \qquad (4)$$

При условии достаточно быстрого убывания $\eta^{\lambda\mu\nu}$ на бесконечности новый ТЭИ приводит к тому же вектору полных энергии и импульса системы. Модифицированные ТЭИ могут возникать при добавлении к действию членов, исчезающих в плоском пространстве. Примером модифицированного ТЭИ может служить канонич. ТЭИ

$$\theta^{\mu\nu}_{\text{кан}}=\frac{\delta\mathscr{L}}{\delta q_{,\mu}}\,q_{,\nu'}\,g^{\nu\nu'}-g^{\mu\nu}\mathscr{L},$$

являющийся сохраняющимся током теории, отвечающим, согласно первой теореме Нётер, симметриям относительно сдвигов в пространстве-времени ($\mathscr{L}$ — лагранжиан теории). Канонич. ТЭИ в общем случае не является симметричным, и его связь с тензором момента импульса не столь проста.

Иногда полезно рассматривать конформный ТЭИ, получающийся из (1) с помощью (4) и удовлетворяющий условию нулевого следа $(\theta_{\text{конф}})^\mu_\mu=0$. Для полей Янга — Миллса и безмассовых фермионов в размерности $D=4$ конформный ТЭИ совпадает с ТЭИ (1), что связано с *конформной инвариантностью* соответствующих теорий. В случае безмассового скалярного поля в D-мерном пространстве-времени конформный ТЭИ имеет вид

$$\theta^{\mu\nu}_{\text{конф}}=\theta^{\mu\nu}-\frac{1}{4}\frac{D-2}{D-1}\,\partial_\alpha\left(g^{\alpha\nu}\partial^\mu-g^{\mu\nu}\partial^\alpha\right)\varphi^2.$$

С ним связан сохраняющийся дилатац. ток $D^{\text{конф}}_\mu=x^\nu\theta^{\text{конф}}_{\nu\mu}$. Существование конформного ТЭИ означает, что теория может быть сделана конформно инвариантной добавлением к действию членов, исчезающих в плоском пространстве. В случае скалярного поля это достигается след. модификацией функционала действия:

$$\Delta S=\int d^Dx\left[\sqrt{g}\,\frac{(D-2)}{8(D-1)}\,R\varphi^2\right].$$

В присутствии гравитац. поля (в искривлённом пространстве-времени) ТЭИ материи уже не удовлетворяет условию локального сохранения (3). Вместо этого из ур-ний гравитац. поля и тождества Бьянки (см., напр., *Кривизны тензор*) следует ур-ние

$$\nabla_\mu\theta^{\mu\nu}=0, \qquad (5)$$

где ∇_μ — *ковариантная производная*. Отличие (5) от (3) приводит к нарушению сохранения энергии и импульса только полей материи. Полный же ТЭИ материи и гравитации, определяемый согласно (1), равен нулю в силу ур-ний движения

$$\theta^{\mu\nu}_{\text{полн}}=\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\delta S_{\text{полн}}}{\delta g_{\mu\nu}}=-\frac{1}{8\pi G}\left(R^{\mu\nu}-\frac{1}{2}g^{\mu\nu}R\right)+\theta^{\mu\nu}=0 \qquad (6)$$

и сохраняется автоматически.

Это свойство является общим для теорий, обладающих локальной симметрией. Согласно второй теореме Нётер, полный ток в таких теориях равен нулю. Более того, оказывается, что невозможно модифицировать гравитац. часть выражения (6) так, чтобы полный ТЭИ был отличен от нуля и удовлетворял бы условиям сохранения (3). Т. о., в присутствии гравитац. поля нет содержательного понятия полного ТЭИ.

В нек-рых спец. случаях оказывается разумным ввести, используя преобразование (4), псевдотензор энергии-импульса гравитац. поля, являющийся тензором только относительно линейных преобразований координат. Так, если материя сосредоточена в ограниченной области пространства и на бесконечности пространство является плоским, симметричный псевдотензор энергии-импульса получается модификацией гравитац. части тензора (6). Напр.,

$$(-g)\,t^{\mu\nu}=\frac{(+g)}{8\pi G}\left(R^{\mu\nu}-\frac{1}{2}g^{\mu\nu}\right)+\partial_\lambda\eta^{\lambda\mu\nu}, \qquad (7)$$

где $\eta^{\lambda\mu\nu}$ даётся след. выражением:

$$\eta^{\lambda\mu\nu}=\partial_\rho\left[\frac{-g}{16\pi G}\left(g^{\lambda\mu}g^{\nu\rho}-g^{\lambda\nu}g^{\mu\rho}\right)\right].$$

Так как $t^{\mu\nu}$ не является тензором, ковариантное понятие плотности энергии и импульса не определено (напр., преобразованиями координат $t^{\mu\nu}$ может быть сделан равным нулю в любой данной точке). Однако вектор полных энергии и импульса системы