супермультиплет, соответствующий $\lambda=1/2$. В *квантовой хромодинамике* суперпартнёр кварка получил назв. **скварк**, а суперпартнёр глюона — *глюино*. В теории *электрослабого взаимодействия* суперпартнёры $W$- и $Z$-бозонов наз. **вино** и **зино**. В супергравитации суперпартнёр гравитона, имеющий спин 3/2, назван *гравитино*.

В случае точной С. (ненарушенной) массы суперпартнёров должны быть одинаковыми. Однако на опыте бозоны и фермионы с равными массами не обнаружены. Отсюда следует, что С., адекватная законам природы, должна быть **нарушенной**.

Разработаны разл. методы построения теорий с нарушенной симметрией. Нек-рые из этих методов применимы также и к суперсимметричным теориям. На их основе делаются попытки построения реалистич. суперсимметричных моделей. Разл. модели дают разные предсказания для значений массы суперпартнёров.

**Грассмановы числа.** В построении аппарата суперсимметричных теорий фундам. роль играют грассмановы числа — элементы *Грассмана алгебры*. Алгебра Грассмана — одна из простейших градуированных ассоциативных алгебр с единицей. Её образующие $a_1, \ldots, a_q$, по определению, нечётны и подчинены соотношениям антикоммутации $a_i a_j + a_j a_i = 0$. В силу этих определений все нечётные элементы алгебры Грассмана между собой антикоммутируют, а все чётные элементы коммутируют как между собой, так и с нечётными элементами.

Грассмановы числа позволяют установить связь между супералгеброй и нек-рой группой и тем самым перейти от бесконечно малых преобразований к конечным преобразованиям С. В случае алгебр Ли элементы соответствующей группы образуются с помощью экспоненц. ф-лы. Аналогичным образом и для супергруппы можно построить экспоненц. выражения

$$\exp \sum b_n B_n. \tag{7}$$

Здесь $B_n$ — генераторы супералгебры, а $b_n$ — параметры группы. Однако если в качестве параметров взять обычные числа, то величины (7) группы не образуют. Для того, чтобы они образовали группу, нужно в качестве параметров взять грассмановы числа. При этом должно выполняться правило: множители при чётных генераторах — чётные элементы, а при нечётных — нечётные. Группы, построенные таким способом, обычно наз. **супергруппами**.

В простых вариантах суперсимметричных теорий используются грассмановы числа с четырьмя образующими, для к-рых вводятся спец. обозначения: $\theta_\alpha$, $\bar\theta_{\dot\alpha}$. Индексы $\alpha$ и $\dot\alpha$ принимают два значения. Такие обозначения приспособлены к тому, что образующие $\theta_\alpha$ и $\bar\theta_{\dot\alpha}$ являются двухкомпонентными вейлевскими спинорами, преобразующимися по комплексно-сопряжённым представлениям группы $SL(2,C)$. Для грассмановых чисел построена не только соответствующая алгебра, но и аппарат анализа. Осн. относящиеся сюда результаты изложены Ф. А. Березиным в [4]; ему принадлежит ведущая роль в разработке этого раздела математики.

Осн. операции алгебры и анализа для грассмановых чисел с образующими $\theta_\alpha$ и $\bar\theta_{\dot\alpha}$ определяются след. образом. Поднятие и опускание индексов производится с помощью антисимметричной матрицы $\varepsilon$:

$$\theta^\alpha = \varepsilon^{\alpha\beta}\theta_\beta,\ \theta_\alpha = \varepsilon_{\alpha\beta}\theta^\beta, \quad \varepsilon^{\alpha\gamma}\varepsilon_{\gamma\beta} = \delta^\alpha_\beta. \tag{8}$$

(Такие же ф-лы справедливы для величин с пунктирными индексами.) По двум одинаковым, верхнему и нижнему, индексам производится суммирование. Величины типа $\theta\varphi = \theta^\alpha\varphi_\alpha$ и $\bar\theta\bar\varphi = \bar\theta_{\dot\alpha}\bar\varphi^{\dot\alpha}$ являются лоренцовыми скалярами. Дифференцирование по образующим производится посредством дифференц. операторов

$$\partial_\alpha \equiv \partial/\partial\theta^\alpha,\ \bar\partial_{\dot\alpha} \equiv \partial/\partial\bar\theta^{\dot\alpha}. \tag{9}$$

Поскольку грассмановы числа представляют собой суммы произведений образующих $\theta$, операции дифференцирования (9) могут быть применены к любому грассманову числу. Т. к. эти операции нечётные, при перестановке оператора дифференцирования (9) с любым нечётным элементом алгебры Грассмана необходимо изменить знак. Интегрирование определено с помощью ф-л

$$\int d\theta = 0,\ \int \theta\, d\theta = 1. \tag{10}$$

Здесь $\theta$ — любая из образующих алгебры Грассмана. Повторное применение правил (10) позволяет вычислить интеграл от любого грассманова числа. Для определённых так операций дифференцирования и интегрирования по антикоммутирующим переменным справедливы (с очевидными изменениями) обычные правила дифференциального и интегрального исчисления. В частности, ф-ла

$$\int d\theta^\alpha \partial_\alpha \Psi = 0 \tag{11}$$

справедлива для любого грассманова числа $\Psi$. Соотношение (11) непосредственно следует из правил интегрирования.

**Суперполя.** Осн. конструктивным элементом при построении суперсимметричных теорий являются **суперполя**, представляющие собой элементы алгебры Грассмана с образующими $\theta$, коэффициентами при к-рых служат физ. поля (см. также *Суперпространство*). Каждое суперполе объединяет неск. физ. полей с целыми и полуцелыми спинами. Благодаря суперполям удалось придать суперсимметричным теориям простую форму. Те же теории, выраженные через компонентные поля, выглядят значительно сложнее.

Суперполя наиб. простого вида — это скалярные киральные суперполя. Они характеризуются тем, что содержат либо только произведения образующих $\theta$, либо только образующих $\bar\theta$. Соответственно существуют два типа киральных суперполей — левое и правое:

$$\Phi_L = A(x) + \theta\varphi(x) + \theta\theta F(x), \quad \Phi_R = B(x) + \bar\theta\bar\varphi(x) + \bar\theta\bar\theta G(x), \tag{12}$$

где $A(x)$, $F(x)$ и $\varphi_\alpha(x)$ — компонентные поля левого суперполя $\Phi_L(x)$ ($x$ — точка пространства-времени). Поля $A$ и $F$ — скалярные, двухкомпонентный спинор $\varphi$ — левое киральное поле. Аналогичными свойствами обладают компонентные поля правого кирального суперполя $\Phi_R(x)$, содержащего правое киральное поле $\bar\varphi(x)$. Оба суперполя являются лоренцовыми скалярами. При пространственной инверсии левое киральное суперполе переходит в правое и наоборот. Весьма важно след. соглашение: скалярные поля $A(x)$ и $F(x)$ (и вообще поля целого спина) коммутируют друг с другом и со всеми остальными полями, тогда как спинорные поля $\varphi_\alpha(x)$ (поля полуцелого спина) являются нечётными элементами алгебры Грассмана, а $\theta\varphi$ — чётными. Благодаря этому суперполя (12) коммутируют друг с другом.

Киральные суперполя (12) хорошо иллюстрируют принцип построения суперполей. Примером суперполя общего типа, содержащего все образующие $\theta$, является векторное суперполе

$$V(x) = a(x) + \theta\varphi(x) + \bar\theta\bar\varphi(x) + \theta\sigma^\mu\bar\theta v_\mu(x) + \theta\theta b(x) + \bar\theta\bar\theta\bar b(x) + \theta\theta\bar\theta\bar\Psi(x) + \bar\theta\bar\theta\theta\Psi(x) + \theta\theta\bar\theta\bar\theta c(x). \tag{13}$$

Его компонентные поля: четыре скалярных поля $a$, $b$, $\bar b$ и $c$, четыре спинорных $\varphi$, $\bar\varphi$, $\Psi$, $\bar\Psi$ и одно векторное $v_\mu$. С наличием векторной компоненты и связано название суперполя (13). Помимо рассмотренных скалярных суперполей существуют суперполя с разл. лоренцовыми индексами, а также с индексами, относящимися к внутр. симметриям.

В теориях С. удобно пользоваться спец. представлением алгебры супертрансляций (2), в к-ром генераторы выражены через операторы, действующие на суперполя. Оператор 4-импульса выражается через оператор дифференцирования по координате: $P_\mu = -i\partial_\mu$, а спинорные генераторы берутся в виде

$$Q_\alpha = \partial_\alpha + i\sigma^\mu_{\alpha\dot\alpha}\bar\theta^{\dot\alpha}\partial_\mu, \quad \bar Q_{\dot\alpha} = \bar\partial_{\dot\alpha} - i\theta^\alpha\sigma^\mu_{\alpha\dot\alpha}\partial_\mu. \tag{14}$$