Алгебра супертрансляций. Супералгеброй, лежащей в основе физ. суперсимметричных теорий, является т. н. алгебра супертрансляций, она порождается конечным числом чётных и нечётных генераторов. Нечётные генераторы, действуя на состояния системы, переводят бозоны в фермионы и наоборот. Убедиться в этом можно след. образом. Операторы рождения бозонов и фермионов можно рассматривать как систему образующих нек-рой (бесконечномерной) градуированной алгебры. При этом бозонные операторы считаются чётными элементами алгебры, а фермионные — нечётными. Установив чётность одночастичных состояний, можно определить чётность любых состояний. Справедливо общее утверждение: чётные состояния подчиняются статистике Бозе—Эйнштейна, нечётные — статистике Ферми—Дирака. Отсюда легко вывести утверждение относительно нечётных генераторов алгебры супертрансляций.

Из условия релятивистской инвариантности теории следует, что генераторы супертрансляций должны преобразовываться по нек-рому представлению группы Лоренца. Учитывая связь спина и статистики, получаем дальнейшее уточнение этого требования: нечётные генераторы преобразуются по представлениям с полуцелым спином, чётные — по представлениям с целым спином. Простейшее допущение, согласующееся с этим требованием, состоит в том, что нечётные генераторы являются *спинорами*. Это допущение и лежит в основе построения алгебры супертрансляций.

Спиноры — это величины, преобразующиеся по фундам. представлениям группы комплексных матриц второго порядка с детерминантом, равным единице. Эта группа обозначается символом $SL(2, C)$. Существует два фундам. представления группы $SL(2, C)$, к-рые комплексно сопряжены друг другу. Соответствующие спиноры обычно обозначаются символами типа Q_α и $\bar{Q}_{\dot\alpha}$. Индексы α и $\dot\alpha$ принимают два значения.

Более детальное рассмотрение приводит к тому, что для построения нетривиальной алгебры супертрансляций чётные генераторы должны образовывать 4-вектор P_μ ($\mu=0, 1, 2, 3$). Т. о., наиб. простая алгебра супертрансляций

$$\tilde{t}=\{P_\mu, Q_\alpha, \bar{Q}_{\dot\alpha}\} \tag{2}$$

порождается четырьмя чётными генераторами P_μ и четырьмя нечётными генераторами Q_α, $\bar{Q}_{\dot\alpha}$. Перестановочные соотношения типа (1) между генераторами всегда могут быть приведены к форме

$$[Q_\alpha, \bar{Q}_{\dot\alpha}]_+=2\sigma^\mu_{\alpha\dot\alpha}P_\mu. \tag{3}$$

Все остальные коммутаторы обращаются в нуль. Индекс «+» в левой части соотношения (3) означает антикоммутатор. Это соответствует рассмотренным выше правилам построения операции коммутирования в супералгебре. σ^μ — матрицы второго порядка: $\sigma^0=I$, σ^i, $i=1, 2, 3$ — спиновые *Паули матрицы*, I — единичная матрица.

Важнейшее физ. предположение относительно супералгебры (2) состоит в том, что чётные генераторы P_μ являются 4-вектором энергии-импульса системы. Операторы энергии и импульса — это генераторы трансляций времени и пространства. Алгебра супертрансляций (2) представляет собой расширение алгебры трансляций путём введения четырёх новых генераторов «спиновых трансляций» Q_α и $\bar{Q}_{\dot\alpha}$. Генераторы обычных трансляций связаны с генераторами спинорных трансляций нетривиальными соотношениями (3). Перестановочные соотношения между операторами моментов — генераторами преобразований Лоренца — и генераторами алгебры супертрансляций (2) однозначно определяются ковариантными свойствами этих генераторов.

Условие С. теории сводится к тому, чтобы алгебра супертрансляций была представлена линейными операторами в пространстве состояний. Для этого достаточно, чтобы операторы, соответствующие генераторам (2), удовлетворяли перестановочным соотношениям (3). Из этих соотношений видно, что для суперсимметричных теорий операторы энергии и импульса выражаются в виде произведений спинорных операторов. В частности, для гамильтониана системы получается выражение

$$H=\frac{1}{4}\left([Q_1, \bar{Q}_{\dot 1}]_+ + [Q_2, \bar{Q}_{\dot 2}]_+\right), \tag{4}$$

из к-рого следует, что энергия суперсимметричной системы не может принимать отрицат. значений.

Алгебра супертрансляций (2) — самая простая среди семейства аналогичных супералгебр. Члены этого семейства характеризуются целым числом N, обозначающим кол-во спинорных генераторов. Более сложные супералгебры $\tilde{t}_N$ описываются единым образом:

$$\tilde{t}_N=\{P_\mu, Z_{AB}, Z^+_{AB}, Q_{\alpha A}, \bar{Q}_{\dot\alpha A}\}, \; A, B=1, \ldots, N. \tag{5}$$

Индекс A относится к внутр. пространству (см. *Внутренняя симметрия*). Перестановочные соотношения имеют вид (выписываются только отличные от нуля коммутаторы)

$$\begin{aligned}
&[Q_{\alpha A}, \bar{Q}_{\dot\beta B}]_+=2\delta_{AB}\sigma^\mu_{\alpha\dot\beta}P_\mu,\\
&[Q_{\alpha A}, Q_{\beta B}]_+=\varepsilon_{\alpha\beta}Z_{AB},\\
&[\bar{Q}_{\dot\alpha A}, \bar{Q}_{\dot\beta B}]_+=\varepsilon_{\dot\alpha\dot\beta}Z^+_{AB}
\end{aligned} \tag{6}$$

(δ_{AB} — символ Кронекера, ε — антисимметричная матрица второго порядка). Генераторы Z наз. **центральными зарядами**, они коммутируют со всеми элементами супералгебры. Спинорные генераторы $Q_{\alpha A}$ и $\bar{Q}_{\dot\alpha A}$ преобразуются по комплексно-сопряжённым представлениям группы внутр. симметрии. Исходя из достаточно общих требований, можно показать, что семейство супералгебр (5) исчерпывает все возможные алгебры супертрансляций. О супералгебре (2), соответствующей $N=1$, говорят как о $N=1$ суперсимметрии (или просто С.). Случай $N>1$ отвечает **расширенной суперсимметрии**.

Супермультиплеты частиц. Неприводимые представления алгебры супертрансляций (2) объединяют неск. неприводимых представлений группы Пуанкаре с одной и той же массой и разл. значениями спина. Проще всего это проиллюстрировать для одночастичных состояний. В этом случае получаются *супермультиплеты* частиц. Если масса частиц не равна нулю, структура супермультиплета определяется числом j, принимающим целые и полуцелые значения. При данном j супермультиплет имеет спиновый состав ($j-1/2, j, j, j+1/2$), т. е. он содержит две частицы спина j, частицу спина $j-1/2$ и частицу спина $j+1/2$. В случае нулевой массы супермультиплеты объединяют частицы, имеющие спиральность λ, $\lambda+1/2$. Число λ принимает целые и полуцелые значения. В отличие от спина j, принимающего неотрицат. значения, λ может принимать значения любого знака. Супермультиплеты (λ, $\lambda+1/2$) и ($-\lambda$, $-\lambda-1/2$) переходят друг в друга при *пространственной инверсии*. В каждом супермультиплете число бозонных состояний равно числу фермионных состояний, с этим связано сокращение *расходимостей* в суперсимметричных теориях. Как известно, в квантовой теории поля нек-рые физ. величины оказываются бесконечными за счёт расходящихся интегралов. В суперсимметричных теориях многие из этих величин оказываются конечными, поскольку расходимости, связанные с бозонами, компенсируются соответствующими расходимостями, связанными с фермионами.

Для расширенной С. супермультиплеты имеют более сложное строение. Они объединяют частицы с разными спинами и разными значениями внутр. квантовых чисел.

Частицы (состояния), принадлежащие одному супермультиплету, наз. **суперпартнёрами**. Как отмечалось, существование суперпартнёров — одно из наиб. важных качественных предсказаний С. В суперсимметричных обобщениях основных теоретико-полевых моделей фигурируют суперпартнёры известных частиц. Для них установились спец. названия. Укажем наиб. распространённые из них. В *квантовой электродинамике* скалярный суперпартнёр электрона наз. **сэлектроном**, а спинорный суперпартнёр фотона — **фотино**. Электрон и сэлектрон образуют супермультиплет, соответствующий $j=0$, фотон и фотино —