чении взаимодействия. Поскольку в большинстве случаев эти представления выделяются условиями грассмановой аналитичности типа (15), указанный принцип эквивалентен требованию сохранения той или иной грассмановой аналитичности.

Примеры теорий в $N=1$ суперпространстве [4—6]. Построение инвариантных суперполевых действий основано на том свойстве, что при преобразованиях суперсимметрии к высшим компонентам суперполей [D-компонента вещественного (11) и F-компонента кирального (12) $N=1$ суперполей] добавляется полная производная. Поэтому интеграл по d^4x от высшей компоненты разложения по θ плотности лангранжиана, построенной из суперполей и их производных (спинорных и обычных), является инвариантом.

Простой пример $N=1$ суперполевого действия—действие массивного кирального суперполя с самодействием φ^3:

$$I=-\frac{1}{4}\int d^4xd^2\theta d^2\bar{\theta}\varphi(x_L,\theta)\bar{\varphi}(x_R,\bar{\theta})+ \\ +\left[\int d^4x_Ld^2\theta\left(\frac{m}{4}\varphi^2+\frac{1}{3}g\varphi^3\right)+\text{э. с.}\right], \tag{19}$$

где использовано интегрирование по грассмановым переменным (интегрирование по Березину [3]), к-рое является удобным явно инвариантным способом выделения высших компонент из суперполевых лагранжианов. Грассманово интегрирование эквивалентно дифференцированию:

$$\int d^4xd^2\theta d^2\bar{\theta}=\frac{1}{4}\int d^4x(D^\alpha D_\alpha)(\bar{D}_{\dot{\alpha}}\bar{D}^{\dot{\alpha}}), \\ \int d^4x_Ld^2\theta=\frac{1}{2}\int d^4x_L(D^\alpha D_\alpha). \tag{20}$$

После перехода к компонентам и исключения вспомогат. полей $F(x)=F_1(x)+iF_2(x)$ с помощью ур-ний движения действие (19) сводится к выражению

$$I=\int d^4x\Big[\partial^\mu\varphi\partial_\mu\bar{\varphi}-i\frac{1}{2}\psi\sigma_\mu\partial^\mu\bar{\psi}-m^2\varphi\bar{\varphi}- \\ -\frac{m}{4}(\psi^\alpha\psi_\alpha+\bar{\psi}_{\dot{\alpha}}\bar{\psi}^{\dot{\alpha}})-2mg(\varphi+\bar{\varphi})\varphi\bar{\varphi}- \\ -4g^2(\varphi\bar{\varphi})^2-g(\psi^\alpha\psi_\alpha\varphi+\bar{\psi}_{\dot{\alpha}}\bar{\psi}^{\dot{\alpha}}\bar{\varphi})\Big] \tag{21}$$

(где m—масса, g—безразмерная константа связи), т.е. к действию массивного комплексного скалярного поля φ с самодействиями φ^3 и φ^4 и массивного майорановского спинора $\begin{pmatrix}\psi_\alpha\\ \bar{\psi}^{\dot{\alpha}}\end{pmatrix}$, взаимодействующих посредством юкавских связей (метрика пространства Минковского выбрана в виде «$+---$»). Явная $N=1$ суперсимметрия действия (19) становится неявной в компонентном представлении (21). Она теперь выражается в равенстве масс бозонов и фермионов и в наличии единой константы связи.

Действие (19), (21) перенормируемо. Замечат. следствием его суперсимметрии является то, что вместо трёх независимых констант перенормировки, свойственных бозонной теории с самодействием φ^4, в нём появляется лишь одна такая константа (константа перенормировки волновой ф-ции). Этот факт является проявлением простейшего варианта теоремы о неперенормировке, к-рая следует из вида суперполевого действия (19) и явно инвариантной теории возмущений для киральных суперполей. Любой вклад в эфф. квантовое действие всегда локально представим интегралом по вещественному С. $\mathbb{R}^{4|4}$, но не по $\mathbb{C}^{4|2}$. Поэтому возможные суперполевые контрчлены всегда имеют структуру первого члена в действии (19), что приводит к появлению константы перенормировки только перед этим членом.

Самодействие φ^3—единств. перенормируемое самодействие киральных $N=1$ суперполей [действие (19) можно обобщить на любое число таких суперполей].

Общий лагранжиан можно получить из (19) заменами

$$\varphi\bar{\varphi}\to K(\varphi,\bar{\varphi}); \quad \frac{m}{4}\varphi^2+\frac{g}{3}\varphi^3\to P(\varphi),$$

где K и P—произвольные вещественная и комплексная ф-ции своих аргументов. Он приводит к кэлеровской нелинейной *сигма-модели* для физ. бозонов [10] и имеет простой геом. смысл.

Др. важная модель—$N=1$ калибровочная теория. Она описывается действием

$$I=\frac{1}{2g^2}\int d^4x_Ld^2\theta\mathrm{Tr}(W^\alpha W_\alpha)+\text{э. с.}, \tag{22}$$

где W^α—киральная ковариантная спинорная напряжённость $N=1$ калибровочного суперполя $V^A(x,\theta,\bar{\theta})$:

$$W^\alpha=W^{\alpha A}T^A=\frac{1}{16}(\bar{D}_{\dot{\alpha}}\bar{D}^{\dot{\alpha}})[\exp(-2V^AT^A)D^\alpha\exp(2V^AT^A)], \tag{23}$$

$$\exp(2V^AT^A)=\exp[-i\bar{\lambda}^B(x_R,\bar{\theta})T^B]\exp(2V^AT^A)\times \\ \times\exp[i\lambda^B(x_L,\theta)T^B]. \tag{24}$$

Здесь T^A—генераторы калибровочной группы (A—индекс присоединённого представления группы). Трансформац. закон (24) в абелевом пределе сводится к (17), поэтому в $V^A(\bar{x},\theta,\bar{\theta})$ можно перейти к калибровке Весса—Зумино (18). В этой калибровке действие (22) переписывается в компонентах следующим образом:

$$I=\frac{1}{g^2}\int d^4x\mathrm{Tr}\left[-\frac{1}{4}G^{\mu\nu}G_{\mu\nu}-i\chi\sigma^\mu D_\mu\bar{\chi}+\frac{1}{2}D^2\right], \tag{25}$$

где $G_{\mu\nu}\equiv G^A_{\mu\nu}T^A$—обычная напряжённость поля Янга—Миллса и $(D_\mu\bar{\chi})^{\dot{\alpha}}$—ковариантная производная в присоединённом представлении. Калибровочное $N=1$ суперполе V^A и суперполевая формулировка $N=1$ калибровочной теории могут быть выведены из требования, чтобы понятие киральности (15) сохраняло свой смысл для суперполей, принадлежащих к нетривиальным представлениям калибровочной группы. Тот же фундам. принцип сохранения киральности (т. е. $N=1$ грассмановой аналитичности) лежит в основе геом. формулировок $N=1$ супергравитации.

Гармоническое суперпространство. Попытки описания суперсимметричных теорий с $N\geqslant 2$ в С. $\mathbb{R}^{4|4N}$ или $\mathbb{C}^{4|2N}$ сталкиваются с существ. трудностями. Осн. трудность состоит в том, что соответствующие суперполя содержат много лишних супермультиплетов и для их устранения приходится либо налагать сторонние связи, либо прибегать к сложным калибровочным группам негеом. происхождения. Более того, существуют т. н. «no-go» теоремы—теоремы о невозможности построения формулировок ряда теорий с расширенной суперсимметрией (напр., калибровочных теорий с $N=3$, 4) вне массовой поверхности на основе конечного числа вспомогат. полей [11].

Адекватное геом. описание теорий с расширенной суперсимметрией достигается в рамках гармонич. С. Они получаются добавлением к обычным координатам $\{x^\mu,\theta^{\alpha i},\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}_j\}$ дополнит. чётных координат, параметризующих пространства групп автоморфизмов.

Гармоническое $N=2$ суперпространство [12]

$$\mathbb{R}^{4|8}\times S^2=\{x^\mu,\theta^{\alpha i},\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}_j,u^{\pm i}\}\equiv\{z^M,u^{\pm i}\} \tag{26}$$

включает двумерную сферу S^2, на к-рой группа автоморфизмов $N=2$ супералгебры $SU(2)$ действует как группа движений и для описания к-рой используются изоспинорные гармоники

$$u^{+i},\ u^-_i=(u^{+i})^+,\ u^{+i}u^-_i\equiv \\ \equiv u^{+i}u^{-j}\varepsilon_{ij}=1,\ u^{+i}u^+_i=u^{-i}u^-_i=0$$

($\pm$ — $U(1)$-заряды). Они определены с точностью до произ-