СУПЕРПРОСТРА́НСТВО — расширенное пространство в теории *суперсимметрии*, к-рое кроме обычных пространственно-временны́х координат включает также спинорные координаты.

Спинорные переменные θ^α антикоммутируют друг с другом и коммутируют с координатами пространства-времени x^μ:

$$\begin{aligned} &\theta^\alpha\theta^\beta+\theta^\beta\theta^\alpha=0, \quad \alpha,\beta=1,2;\\ &x^\mu\theta^\beta-\theta^\beta x^\mu=0, \quad \mu=0,1,2,3, \end{aligned} \qquad (1)$$

и поэтому они могут рассматриваться как нечётные образующие нек-рой *Грассмана алгебры*, чётными образующими к-рой служат координаты x^μ. Отсюда название для θ^α — г р а с с м а н о в ы к о о р д и н а т ы. Антикоммутативность θ^α необходима для обеспечения правильной связи спина и статистики. Важное следствие антикоммутативности грассмановых переменных — их нильпотентность:

$$(\theta^\alpha)^2=0 \text{ для любого } \alpha. \qquad (2)$$

Концепция С. играет ключевую роль в суперсимметрии [1—6]: группа преобразований суперсимметрии имеет естеств. реализацию в С. как группа его движений, а соответствующие *супермультиплеты* компактно представляются с у п е р п о л я м и [2] — ф-циями, заданными на С.

N-расширенная суперсимметрия Пуанкаре наиб. прямым образом может быть реализована в веществ. С. [1—6]:

$$\mathbb{R}^{4|4N}=\{x^\mu, \theta^{\alpha i}, \bar\theta^{\dot\alpha}_j\} \qquad (3)$$

с 4 чётными координатами x^μ и $4N$ нечётными координатами $\theta^{\alpha i}$, $\bar\theta^{\dot\alpha}_j$, $\alpha, \dot\alpha=1, 2$; $i, j=1, 2, \ldots, N$ [$\bar\theta^{\dot\alpha}_j\equiv(\theta^{\alpha j})^+$, $^+$ — эрмитово сопряжение]. Нечётные координаты являются двухкомпонентными вейлевскими спинорами (1/2, 0) и (0, 1/2) *Лоренца группы* и преобразуются соответственно по кварковому (верх. латинский индекс) и антикварковому (ниж. латинский индекс) представлениям унитарной группы автоморфизмов $U(N)$ расширенной суперсимметрии.

Преобразования суперсимметрии над координатами С. (суперсдвиги) имеют вид

$$\begin{aligned} &\delta x^\mu=i\left(\varepsilon^{k\alpha}(\sigma^\mu)_{\alpha\dot\beta}\bar\theta^{\dot\beta}_k-\theta^{k\alpha}\sigma^\mu_{\alpha\dot\beta}\bar\varepsilon^{\dot\beta}_k\right),\\ &\delta\theta^{\alpha i}=\varepsilon^{\alpha i}, \ \delta\bar\theta^{\dot\alpha}_j=\bar\varepsilon^{\dot\alpha}_j, \end{aligned} \qquad (4)$$

где $\varepsilon^{\alpha i}$, $\bar\varepsilon^{\dot\alpha}_j$ — антикоммутирующие спинорные параметры, $\sigma^\mu=(I, \boldsymbol\sigma)$, $\boldsymbol\sigma$ — *Паули матрицы*, I — единичная матрица. Генераторы суперсдвигов (4) представляются дифференц. операторами на С. (3):

$$\begin{aligned} &Q_{\alpha i}=\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial\theta^{\alpha i}}+(\sigma^\mu)_{\alpha\dot\beta}\bar\theta^{\dot\beta}_i\partial_\mu,\\ &\bar Q^j_{\dot\alpha}=-\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial\bar\theta^{\dot\alpha}_j}-\theta^{j\alpha}(\sigma^\mu)_{\alpha\dot\alpha}\partial_\mu \end{aligned} \qquad (5)$$

($\partial_\mu\equiv\partial/\partial x^\mu$) и вместе с генератором трансляций $P_\mu=i\partial_\mu$ образуют алгебру N-расширенной суперсимметрии Пуанкаре:

$$\begin{aligned} &\{Q_{\alpha i}, \bar Q^j_{\dot\beta}\}=2\delta^j_i(\sigma^\mu)_{\alpha\dot\beta}P_\mu,\\ &\{Q_{\alpha i}, Q_{\beta j}\}=\{\bar Q^j_{\dot\beta}, \bar Q^i_{\dot\alpha}\}=0 \end{aligned} \qquad (6)$$

(где δ^j_i — символ Кронекера). (Полная супералгебра Пуанкаре включает также алгебры группы Лоренца и группы автоморфизмов.)

У одной и той же супергруппы может быть неск. различных С., в к-рых она действует как группа движений. Напр., в случае $N=1$ важную роль в физ. приложениях играет комплексное киральное (левое, L) С. $\mathbb{C}^{4|2}$, содержащее в 2 раза меньше спинорных переменных, чем вещественное С. $\mathbb{R}^{4|4}$,

$$\mathbb{C}^{4|2}=\{x^\mu_L, \theta^\alpha_L\}. \qquad (7)$$

Оно содержит $\mathbb{R}^{4|4}$ как вещественную гиперповерхность. Для плоского пространства условия вложения $\mathbb{R}^{4|4}$ в $\mathbb{C}^{4|2}$ имеют вид

$$\begin{aligned} &x^\mu_L=x^\mu+i\theta^\alpha(\sigma^\mu)_{\alpha\dot\beta}\bar\theta^{\dot\beta},\\ &\theta^\alpha\equiv\theta^\alpha_L. \end{aligned} \qquad (8)$$

При $N>1$ также существуют киральные С. $\mathbb{C}^{4|2N}$, однако адекватными физ. теориями оказываются не они и не $\mathbb{R}^{4|4N}$, а а н а л и т и ч е с к и е г а р м о н и ч е с к и е С. (см. ниже).

Суперполя — ф-ции на С. [2,4—6]. Они представляют собой компактную форму записи супермультиплетов. Поля, составляющие супермультиплет, возникают как коэф. разложения суперполей по степеням грассмановых координат. Из-за нильпотентности последних эти разложения обрываются на конечном числе членов. Преобразования суперсимметрии замыкаются на суперполях вне массовой поверхности, т. е. без использования ур-ний движения. Необходимые для этой цели в с п о м о г а т е л ь н ы е п о л я автоматически присутствуют в разложениях суперполей наряду с физ. полями. Это обеспечивает независимость вида преобразований суперсимметрии от рассматриваемой модели взаимодействия.

Суперполе на С. $\mathbb{R}^{4|4N}$

$$\Phi(x, \theta, \bar\theta)=\varphi(x)+\theta^{\alpha i}\chi_{\alpha i}(x)+\bar\theta_{\dot\alpha j}\bar\psi^{\dot\alpha j}(x)+\ldots \qquad (9)$$

[где $\varphi(x)$ — скалярное, $\chi_{\alpha i}(x)$, $\bar\psi^{\dot\alpha j}(x)$ — вейлевские спинорные поля] содержит в общем случае 2^{4N} бозонных и столько же фермионных компонент (для вещественных суперполей это число уменьшается вдвое). Киральные суперполя, определённые на комплексном С. $\mathbb{C}^{4|2}$ или сопряжённом к нему, с необходимостью комплексны. Они содержат 2×2^{2N} степеней свободы (поскольку в них входят либо $\theta^{\alpha i}$, либо $\bar\theta^{\dot\alpha}_i$). Компонентные поля, стоящие в суперполе в слагаемых с отличающейся на единицу степенью θ, различаются спином или спиральностью на $^1/_2$ и грассмановой чётностью. Преобразования суперсимметрии компактно представляются ф-лой

$$\delta\Phi(x, \theta, \bar\theta)=i(\varepsilon^{\alpha i}Q_{\alpha i}-\bar\varepsilon^{\dot\alpha}_j\bar Q^j_{\dot\alpha})\Phi(x, \theta, \bar\theta). \qquad (10)$$

Суперполе может иметь внеш. лоренцов индекс и индекс группы автоморфизмов суперсимметрии, а также индекс к.-л. группы *внутренней симметрии*.

В общем случае суперполя содержат неск. супермультиплетов. Напр., вещественное $N=1$ суперполе

$$\begin{aligned} &\Phi(x, \theta, \bar\theta)=\varphi(x)+\theta^\alpha\psi_\alpha(x)+\bar\theta_{\dot\alpha}\bar\psi^{\dot\alpha}(x)+\\ &+(\theta^\alpha\theta_\alpha)F(x)+(\bar\theta_{\dot\alpha}\bar\theta^{\dot\alpha})\bar F(x)-i\theta\sigma^\mu\bar\theta A_\mu(x)+\\ &+i\theta^2\bar\theta_{\dot\alpha}\bar\lambda^{\dot\alpha}(x)-i\bar\theta^2\theta^\alpha\lambda_\alpha(x)+\theta^2\bar\theta^2D(x)\\ &(\theta^2\equiv\theta^\alpha\theta_\alpha=\varepsilon^{\alpha\beta}\theta_\beta\theta_\alpha;\\ &\bar\theta^2=(\overline{\theta^2});\ \varepsilon^{12}=-\varepsilon^{21}=1) \end{aligned} \qquad (11)$$

содержит скалярный и векторный [включающий векторное поле $A_\mu(x)$] супермультиплеты вне массовой поверхности (здесь φ, F, D — произвольные скалярные поля, A_μ и λ_α, $\bar\lambda^{\dot\alpha}\equiv(\lambda^\alpha)^+$ — произвольные векторное и спинорные поля). Простейшим неприводимым суперполем является киральное $N=1$ суперполе

$$\varphi(x_L, \theta)=\varphi(x_L)+\theta^\alpha\psi_\alpha(x_L)+\theta^\alpha\theta_\alpha F(x_L), \qquad (12)$$

описывающее скалярный $N=1$ супермультиплет вне массовой поверхности. Этот супермультиплет включает в себя два вещественных поля — скалярное и псевдоскалярное: $\varphi(x_L)\equiv A(x_L)+iB(x_L)$ (спин 0), спинор $\psi_\alpha(x_L)$ (спин 1/2) и два вещественных вспомогат. поля:

$$F(x_L)\equiv F_1(x_L)+iF_2(x_L).$$

Как и поля в пространстве Минковского, суперполя классифицируются по значениям соответствующих *Казимира операторов*, построенных из генераторов группы суперсимметрии [2, 4—8]. Квантовыми числами, имеющими смысл вне массовой поверхности, являются с у п е р с п и н Y и с у п е р и з о с п и н $\tilde I$, к-рые обобщают понятия