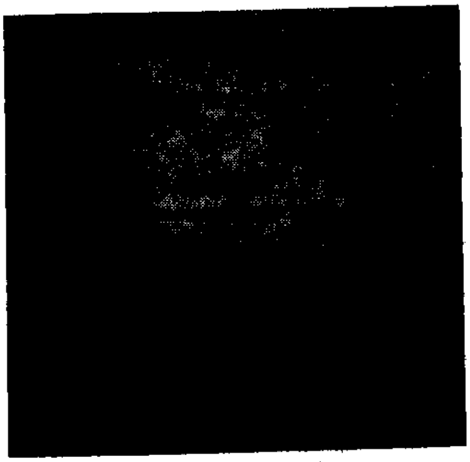
размера С. $\sim \varkappa^{-1}$, потенциал силы отталкивания $U(L) \sim \varkappa^3 \exp(-2\varkappa L)$.

Типичная картина возникновения С. в океане, сфотографированная из космоса, изображена на рис.:



чётко видны пять полос (солитонов), перемещающихся снизу справа вверх налево.

Шрёдингера нелинейное ур-ние для комплексной ф-ции $u(x,t)$

$$iu_t + u_{xx} \pm 2|u|^2 u = 0 \tag{7}$$

является одним из осн. ур-ний нелинейной физики, описывающим эволюцию оптич. волн в нелинейных кристаллах, ленгмюровских волн в плазме, тепловых волн в твёрдых телах и др. При распространении одномерных квазигармонич. волн в слабонелинейных средах в результате кубичной нелинейности (член u_{xx}) и линейной дисперсии (член $2|u|^2u$) происходит самомодуляция — возникают волны огибающей. В случае равновесия нелинейного самосжатия и дисперсионного расплывания появляются С. огибающей. В случае знака «+» в ур-нии (7) С. огибающей имеет вид:

$$u = 2i\eta \exp\left[\frac{1}{2} ivx + i\left(4\eta^2 - \frac{1}{4}v^2\right)t - i\Phi_0\right] \times$$
$$\times \operatorname{sech}[2\eta(x - vt - x_0)]. \tag{8}$$

Здесь η и v — амплитуда и скорость С. [в отличие от С. (4), эти параметры являются взаимно независимыми], Φ_0 и x_0 описывают фазу и положение С. в нач. момент.

В. Е. Захаров и А. Б. Шабат показали (1971), что ур-ние (7) также является точно интегрируемым в рамках метода обратной задачи рассеяния с помощью вспомогат. переопределённой системы линейных ур-ний типа (5), (6) для многокомпонентной (векторной) ф-ции Ψ. Следствием точной интегрируемости является наличие точных многосолитонных решений. Как и в случае ур-ния КдФ, эти решения описывают чисто упругие столкновения С. с сохранением формы, амплитуды и скорости. Единств. следствием столкновения являются фазовые сдвиги — изменения параметров Φ_0 и x_0.

Одномерное ур-ние синус-Гордона. Точно интегрируемым с помощью вспомогат. линейных ур-ний типа (5), (6) для векторной ф-ции Ψ является также синус-Гордона ур-ние

$$\Phi_{tt} - \Phi_{xx} + \sin\Phi = 0. \tag{9}$$

Это ур-ние встречается во мн. физ. задачах, в к-рых ангармонич. потенциал нелинейного самовоздействия волнового поля периодичен по полевой переменной $\Phi(x,t)$. Примерами являются длинные волны в джозефсоновских переходах, *волны зарядовой плотности* в одномерных металлах, нелинейные волны намагниченности в легкоплоскостных и слабых ферромагнетиках и т. д.

Ур-ние (9) имеет солитонные решения двух разл. типов: т. н. кинки и бризеры. Кинк

$$\Phi_К = \operatorname{arctg}\{\exp[\sigma(x - vt - x_0)(1 - v^2)^{-1/2}]\} \tag{10}$$

представляет собой уединённую волну, обладающую топологич. зарядом $(2\pi)^{-1}[\Phi_К(x = +\infty) - \Phi_К(x = -\infty)] \equiv \sigma$, движущуюся со скоростью v ($v^2 < 1$). Кинк имеет смысл т. н. флаксона — кванта магн. потока в теории длинных джозефсоновских переходов, доменной стенки — в ферромагнетиках, носителя заряда — в одномерных металлах и т. д. Точные решения ур-ния (9) описывают чисто упругие столкновения любого числа кинков (10), сопровождающиеся фазовыми сдвигами, т. е. изменением параметров x_0, характеризующих положение кинков в нач. момент. В частности, при столкновении двух кинков со скоростями v_1, v_2 ($v_1 > v_2$) фазовые сдвиги равны:

$$(\Delta x_0)_1 = 2\sqrt{1 - v_1^2} \ln \frac{\sqrt{(1+v_1)(1-v_2)} + \sqrt{(1+v_2)(1-v_1)}}{\sqrt{(1+v_1)(1-v_2)} - \sqrt{(1+v_2)(1-v_1)}},$$

$$(\Delta x_0)_2 = -\sqrt{\left(1 - v_2^2\right) / \left(1 - v_1^2\right)}\,(\Delta x_0)_1.$$

Видно, что фазовые сдвиги не зависят от топологич. зарядов кинков.

Как и для С., описываемых ур-ниями (3) и (7), полный фазовый сдвиг любого кинка при рассеянии на совокупности остальных кинков в точности равен сумме сдвигов, порождённых его столкновениями с каждым из остальных кинков по отдельности.

Наглядно два кинка, разделённых расстоянием L, много бо́льшим их характерных размеров $\sim (1 - v^2)^{-1/2}$, можно представлять как две релятивистские частицы, взаимодействующие с потенциалом $U(L) \sim \sigma_1\sigma_2 \exp(-L)$. Т. о., кинки с одинаковыми зарядами $\sigma_1 = \sigma_2$ отталкиваются, с противоположными ($\sigma_1 = -\sigma_2$) — притягиваются.

Пара кинков с противоположным зарядом может образовать связанное осциллирующее состояние — т. н. бризер, представляющий собой 2-й тип точного солитонного решения ур-ния (9):

$$\Phi_{br} = 4\operatorname{arctg}\{\operatorname{tg}\mu \cos[(t - t_0)\cos\mu] \operatorname{sech}(x - x_0)\sin\mu\} \tag{11}$$

[движущийся бризер может быть получен из (11) преобразованием Лоренца]. Параметр μ, изменяющийся в пределах $0 < \mu < \pi/2$, характеризует энергию связи $\mathscr{E}$ бризера, определённую разность энергий пары удалённых покоящихся ($v = 0$) кинков (10) и энергии бризера (11): $\mathscr{E} = 32\sin^2(\mu/2)$. Столкновения бризеров друг с другом и с кинками также являются чисто упругими и сопровождаются аддитивными фазовыми сдвигами. В реальных системах бризер не наблюдается вследствие диссипации.

В пределе $\Phi^2 \ll 1$ подстановка

$$\Phi(x,t) = u(x,t)\exp(-it) + u^*(x,t)\exp(it)$$

преобразует ур-ние (9) в нелинейное ур-ние Шрёдингера (7) (с верх. знаком). При этом бризер (11) (при $\mu \ll 1$) преобразуется в покоящийся С. (8) с амплитудой $\eta = \mu$.

Многомерные солитоны. Двумерный С. является решением точно интегрируемого ур-ния Кадомцева — Петвиашвили

$$\frac{\partial}{\partial x}(u_t - 6uu_x - u_{xxx}) = -3u_{yy}, \tag{12}$$

описывающего ионно-звуковые волны в плазме, капиллярные волны на поверхности «мелкой» жидкости и т. д. Точное решение ур-ния (12)

$$u(x,y,t) = 2\frac{\partial^2}{\partial x^2} \ln[4(\nu + \nu^*)^{-2} + |x - i\nu y - 3\nu^2 t|^2], \tag{13}$$