кристаллах, вихревые структуры в тонком слое сверхтекучей жидкости, особенно разнообразные в сверхтекучем He^3 (см. *Сверхтекучесть*), магн. трубки (вихри Абрикосова) в сверхпроводниках 2-го рода (см. *Сверхпроводимость*), антициклональные области в геофиз. гидродинамике, в т. ч. «Большое красное пятно» на Юпитере, каналы *самофокусировки* в нелинейной оптике. Трёхмерные С.— это тороидальные вихревые структуры в ферромагнетиках и толстом слое сверхтекучего He^3, солитонные модели элементарных частиц (см. *Солитон* в квантовой теории поля), *чёрные дыры* в теории гравитации. В квантовой теории поля рассматривают С., локализованные в четырёхмерном пространстве-времени,— *инстантоны*.

Математически С. представляют собой локализованные стационарные решения нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных или их обобщений (дифференциально-разностных, интегро-дифференциальных и т. п. ур-ний). Во мн. случаях разл. физ. ситуации и явления описываются одними и теми же ур-ниями, напр. *Кортевега — де Фриса уравнением*, *синус-Гордона уравнением*, *Шрёдингера уравнением нелинейным*, *Кадомцева — Петвиашвили уравнением*. Линейные ур-ния (кроме одномерного волнового ур-ния) не имеют локализованных стационарных решений. С. представляют собой существенно нелинейные объекты, поведение и свойства к-рых принципиально отличаются от поведения волновых пакетов малой амплитуды. Различие особенно сильно, если С. обладает *топологическим зарядом*, т. е. если конфигурация волнового поля в присутствии С. топологически отлична от конфигурации невозмущённого состояния. Значит. часть ур-ний, имеющих солитонные решения, принадлежит к классу ур-ний, в к-ром применим *обратной задачи рассеяния метод*, большинство из них являются интегрируемыми гамильтоновыми системами.

Одномерные солитоны. Уединённая волна на поверхности жидкости конечной глубины впервые наблюдалась в 1834 Дж. С. Расселлом (J. S. Russell). Матем. выражение для формы этой волны было получено в 1854 Ж. В. Буссинеском (J. V. Boussinesq):

$$h=H+\frac{4H\varkappa^2}{\mathrm{ch}^2[(\varkappa/H)(x-s(1+6\varkappa^2)t-x_0)]}. \qquad (1)$$

Здесь H — невозмущённая глубина жидкости, $s=\sqrt{gH}$ — скорость длинных волн малой амплитуды, x_0 — положение центра С., $\varkappa>0$ — безразмерный параметр, характеризующий амплитуду, размер и скорость С. Ур-ние для одномерного С. было выведено в 1895 Кортевегом и де Фрисом. В холодной замагниченной плазме и в плазме без магн. поля с горячими электронами также могут распространяться уединённые волны, аналогичные С. на поверхности жидкости (Р. З. Сагдеев, 1957). С. были использованы Р. З. Сагдеевым при построении теории *бесстолкновительных ударных волн* в плазме, возникающих, напр., при обтекании Земли солнечным ветром.

Моделируя на ЭВМ поведение цепочки атомов, связанных нелинейными упругими силами и описываемых ур-ниями движения

$$\ddot{x}_n=F(x_{n+1}-x_n)-F(x_n-x_{n-1}), \qquad (2)$$

где $F(\xi)=\xi+d\xi^2+\ldots$, n — номер атома в цепочке, Э. Ферми (E. Fermi), Дж. Паста (J. Pasta) и С. Улам (S. Ulam) в 1954 обнаружили аномально медленную стохастизацию в этой системе. Система не термализовалась (в ней не устанавливалось термодинамич. равновесие), а периодически возвращалась в исходное состояние с нач. распределением. При исследовании этой проблемы выяснилось, что в непрерывном пределе она переходит в Кортевега — де Фриса ур-ние (КдФ)

$$u_t+6uu_x+u_{xxx}=0, \qquad (3)$$

выведенное в 1895 для описания эволюции волнового пакета на поверхности жидкости малой глубины. Ур-ние КдФ является универсальным ур-нием, описывающим одномерные или квазиодномерные среды, в к-рых конкурируют слабая квадратичная нелинейность [член $6uu_x$ в ур-нии (3)] и слабая линейная дисперсия [член u_{xxx} в ур-нии (3)]. Оказалось, что оно описывает также и колебат. поведение цепочки атомов, а в пределе малой амплитуды и большой длины волны имеет солитонное решение:

$$u=\frac{2\varkappa}{\mathrm{ch}^2[\varkappa(x-4\varkappa^2t-x_0)]}. \qquad (4)$$

В зависимости от соотношения указанных выше двух факторов система переходит из одного состояния в другое, а в случае их взаимной компенсации возникает С.

Из численного решения ур-ния (3) [Н. Забуски (N. Zabusky) и М. Крускал (M. Kruskal), 1964] следует, что С. обладают значит. устойчивостью и при столкновениях рассеиваются упруго, сохраняя свою форму и амплитуду. Анализируя это явление, М. Крускал, Дж. Грин (G. Green), Ч. Гарднер (C. Gardner) и Р. Миура (R. Miura) открыли в 1967 фундам. метод обратной задачи рассеяния, позволивший явно проинтегрировать ур-ние (3), к-рое можно представить как условие совместности переопределённой системы линейных ур-ний для вспомогат. ф-ции Ψ:

$$\Psi_{xx}+(\lambda^2+u)\Psi=0, \qquad (5)$$

$$\Psi_t=4\Psi_{xxx}+6u\Psi_x+3u_x\Psi. \qquad (6)$$

Ур-ние (5) представляет собой стационарное ур-ние Шрёдингера с потенциалом — $u(x,t)$. Если потенциал удовлетворяет ур-нию КдФ (3), то дискретные собств. значения ур-ния Шрёдингера не зависят от времени и непосредственно связаны с С. Если ур-ние (5) имеет N дискретных собств. значений $\lambda_n^2=-\varkappa_n^2$ $(n=1,\ldots,N)$, то при $t\to\pm\infty$ будут присутствовать N С. вида (4) с параметрами $\varkappa=\varkappa_n$. В общем случае в решении содержится также осциллирующая «несолитонная часть».

Решение ур-ния (5), определённое методом обратной задачи рассеяния, имеет вид:

$$\Psi\to\exp(i\lambda x)+r(\lambda,t)\exp(-i\lambda x) \text{ при } x\to+\infty,$$

$$\Psi\to a^{-1}(\lambda)\exp(i\lambda x) \text{ при } x\to-\infty.$$

В чисто солитонном случае $r(\lambda,t)\equiv0$

$$a(\lambda)=\prod_{n=1}^{N}[(\lambda+i\varkappa_n)/(\lambda-i\varkappa_n)].$$

N-солитонное решение описывает рассеяние N С. друг на друге. Это рассеяние происходит упруго с сохранением амплитуд $\varkappa_n^2$, сдвигаются лишь асимптотич. координаты С. При парном столкновении С. с амплитудами $\varkappa_1^2,\varkappa_2^2$ $(\varkappa_1^2>\varkappa_2^2)$ С. приобретают сдвиги

$$(\Delta x_0)_1=\frac{1}{2\varkappa_1}\ln\frac{(\varkappa_1+\varkappa_2)^2}{(\varkappa_1-\varkappa_2)^2},\quad(\Delta x_0)_2=-\frac{\varkappa_1}{\varkappa_2}(\Delta x_0)_1,$$

т. е. быстрый С. приобретает положительный, а медленный — отрицательный сдвиги. При взаимодействии N С. полный сдвиг каждого С. равен алгебраич. сумме сдвигов от парных соударений, т. е. отсутствуют многосолитонные взаимодействия. Столкновения С., описываемых ур-ниями КдФ, можно наглядно представлять как взаимодействие нерелятивистских частиц, между к-рыми действуют парные силы отталкивания. Напр., для двух С. (4) с одинаковыми амплитудами $\varkappa$, разделённых расстоянием L, много бо́льшим характерного