Т. о., квадрат длины u^μ равен 1. Инвариантное ускорение определяется как

$$w^\mu = \frac{du^\mu}{ds} = \frac{d^2x^\mu}{ds^2}. \qquad (31)$$

Из (31) следует, что

$$w_\mu u^\mu + w^\mu u_\mu = 2w_\mu u^\mu = 0, \qquad (32)$$

т. е. четырёхмерное ускорение ортогонально к 4-скорости.

Операции дифференцирования и интегрирования в частной О. т. могут быть представлены в ковариантном виде. Взятие частной производной по $\partial/\partial x^\mu$ повышает ранг тензора на единицу с появлением ковариантного индекса μ (простейший пример — вектор $\partial\varphi/\partial x^\mu$, где φ — скаляр).

В четырёхмерном мире Минковского возможны одномерные многообразия — линии, двумерные — поверхности, трёхмерные — гиперповерхности и четырёхмерные — объёмы. По всем ним могут производиться операции интегрирования. Инвариантная форма интеграла по линии может иметь вид $\int f(s)ds$ или $\int B_\mu dx^\mu$. Элементом двумерной поверхности является тензор $dx^\mu\delta x^\nu - dx^\nu\delta x^\mu$, соответственно инвариантный интеграл возникает при интегрировании с антисимметричным тензором. Элемент гиперповерхности, построенный на 4-векторах $dx(1)$, $dx(2)$, $dx(3)$ (где числа в скобках нумеруют 4-векторы), имеет вид детерминанта

$$\begin{vmatrix} dx^\mu(1) & dx^\nu(1) & dx^\rho(1) \\ dx^\mu(2) & dx^\nu(2) & dx^\rho(2) \\ dx^\mu(3) & dx^\nu(3) & dx^\rho(3) \end{vmatrix}$$

и является тензором третьего ранга. В этом случае удобно ввести полностью антисимметричный тензор ε_{0123}, такой, что $\varepsilon_{0123} = 1$, а при каждой перестановке индексов знак меняется. Этот тензор инвариантен при собственных преобразованиях Лоренца (но меняет знак при замене $t \to -t$ или $\boldsymbol{r} \to -\boldsymbol{r}$). С его помощью объёму гиперповерхности можно поставить в соответствие вектор $ds_\mu = (1/3!)\,\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}dx^\nu(1)dx^\rho(2)dx^\sigma(3)$. Для случая, когда гиперповерхность — пространственная область с $t = 0$, у ds_μ отлична от нуля только компонента ds_0, а если $dx(1)$, $dx(2)$, $dx(3)$ направлены по осям x, y, z, то

$$ds_0 = dxdydz = dx^1dx^2dx^3,$$

т. е. ds_0 равна элементу трёхмерного объёма. Элемент четырёхмерного объёма может быть представлен в виде $d\Omega = (1/4!)\,\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}dx^\mu(1)dx^\nu(2)dx^\rho(3)dx^\sigma(4)$ либо $d\Omega = dx^0\,dx^1\,dx^2\,dx^3$, т. е. он является четырёхмерным скаляром. Так же как в трёхмерном пространстве, в четырёхмерном пространстве существуют теоремы Гаусса и Стокса, напр.

$$\int B^\mu ds_\mu = \int \frac{\partial B^\mu}{\partial x^\mu} d\Omega.$$

Спинорные представления группы Лоренца

Из 4-вектора x^0, x^1, x^2, x^3 можно составить эрмитову матрицу

$$M = \begin{pmatrix} x^0 + x^1 & x^2 - ix^3 \\ x^2 + ix^3 & x^0 - x^1 \end{pmatrix}.$$

Детерминант этой матрицы представляет собой интервал $(x^0)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2$. Если умножить M справа на произвольную унимодулярную матрицу (матрицу с детерминантом единица) K, а слева на эрмитово сопряжённую K матрицу K^+ $(M' = K^+MK)$, то очевидно, что это преобразование сохраняет как эрмитовость, так и детерминант матрицы M. Действительно, $(M')^+ = (K^+MK)^+ = K^+MK = M'$, $\det M' = \det K^+ \det M \det K = \det M$.

Т. о., если записать матрицу M' в виде

$$M' = \begin{pmatrix} (x^0)' + (x^1)' & (x^2)' - i(x^3)' \\ (x^2)' + i(x^3)' & (x^0)' - (x^1)' \end{pmatrix},$$

то получим $s^2 = (s')^2$, т. е. преобразование, принадлежащее группе Лоренца. Очевидно, что так построенные преобразования образуют группу. Можно показать, что каждому собств. преобразованию Лоренца соответствуют две и только две матрицы K, отличающиеся лишь знаком. Возможность найти для каждого преобразования Лоренца подходящую матрицу K следует, по существу, из того, что унимодулярная матрица зависит от стольких же параметров, что и группа Лоренца, а неоднозначность в знаке матрицы K очевидна. Если ввести двухкомпонентную величину $\binom{\varphi_1}{\varphi_2}$, преобразующуюся при преобразованиях Лоренца с помощью матрицы K, то получится новый вид представления группы Лоренца — с п и н о р н ы й. Он возникает естественно при построении *Дирака уравнения*, описывающего частицы со спином $^1/_2$ в квантовой теории поля.

Структура пространства Минковского

Из ф-л (9) и (10) следует, что в частной О. т. время события не является абс. величиной: события, происходящие в разных точках, будут иметь разные времена в различных и. с. о., даже если они были одновременны в исходной системе отсчёта. Если

$$|x_A - x_B| > |t_A - t_B|, \qquad (33)$$

то временной порядок событий A, B может меняться при переходе от системы L к системе L'. В этом нет логич. противоречия, если скорость света является предельной для распространения сигналов и взаимодействий, т. к. тогда при выполнении условия (33) события A и B не могут быть причинно связаны. Напротив, если $|x_A - x_B| \leqslant |t_A - t_B|$, возможна причинная связь между A и B, но в этом случае порядок событий не меняется. (Однако если бы существовали частицы, движущиеся со скоростью, большей скорости света,— т. н. *тахионы*, то порядок причинно связанных событий мог бы быть разным в разных системах отсчёта. Это приводило бы к серьёзным затруднениям с причинностью, т. к. наблюдатель в L' мог бы «уничтожить» событие A, к-рое в L порождает событие B, и причинная связь нарушилась бы. Попытки переинтерпретировать теорию тахионов так, чтобы она стала непротиворечивой, не привели к успеху.)

Невозможность движения сигналов со скоростью, большей скорости света, не означает, что в частной О. т. вообще невозможны движения со сверхсветовой скоростью. Такие движения могут быть реализованы, напр., как движение «зайчика» от прожектора, но в этом случае взаимодействие и причинная связь между разными точками траектории «зайчика» отсутствуют.

Инвариантная запись (33), справедливая в любой системе отсчёта, имеет вид $s_{AB}^2 < 0$. Такие интервалы наз. п р о с т р а н с т в е н н о п о д о б н ы м и. В подходящей системе отсчёта соответствующий им 4-вектор AB может быть представлен в виде $(0, \boldsymbol{r})$. Условие $s_{AB}^2 > 0$ определяет в р е м е н и п о д о б н ы е интервалы; соответствующий вектор может быть представлен в виде $(t, 0)$, и время t — это время, отсчитанное часами, движущимися по прямой AB. Ур-ние $s^2 = 0$ соответствует прямой, являющейся траекторией светового луча или любой безмассовой частицы. Относительно любой точки O трёхмерное многообразие, наз. *световым конусом* или световой гиперповерхностью, на к-рой лежат все световые лучи, проходящие через O, разбивает пространство на две области:

$$s_{OA}^2 \geqslant 0, \qquad (34,\text{а})$$

$$s_{OA}^2 < 0. \qquad (34,\text{б})$$