ведено выше, как $\psi' = \psi U$. Условие унитарности $U^+U = I$ является следствием ортонормированности базисных ф-ций ψ и ψ'. Т. к. обратный О. $U^{-1} = U^+$, то обратное преобразование имеет вид $\psi = \psi' U^+$. Обозначая символом F матричное представление О. $\hat{F}$ в n-представлении $\langle n|F|n'\rangle$ и символом $\hat{F}'$ матрицу $\langle\alpha|F|\alpha'\rangle$, будем иметь в компактной записи правило преобразования О. динамич. переменной от одного представления к другому в виде $F' = U^+FU$. Преобразование ф-ции состояния, определяемой в n-представлении совокупностью компонент $\Phi = \{\Phi_n\}$, а в α-представлении — совокупностью штрихованных компонент $\Phi' = \{\Phi'_\alpha\}$, записывается как $\Phi' = U^+\Phi$.

Унитарные преобразования U сохраняют нормировку волновых ф-ций, свойство их ортогональности, порядок действия О. динамич. величин, сумму их диагональных элементов

$$\mathrm{Sp}\hat{F} = \sum_n \langle n|F|n\rangle = \sum_\alpha \langle\alpha|F|\alpha\rangle = \mathrm{Sp}F'$$

и т. д. Проблему определения собств. значений О. F можно свести к проблеме построения такого О. U, к-рый превращал бы матрицу $\langle n|F|n'\rangle$ в диагональную: $\langle\alpha|F|\alpha'\rangle = f_\alpha\Delta(\alpha - \alpha')$.

Примеры О. преобразований приводились выше. Так, переход к представлению Гейзенберга осуществлялся с помощью О. $U = \exp\{-i\hat{H}t/\hbar\}$, к представлению взаимодействия — с помощью $U = \exp\{-i\hat{H}_0t/\hbar\}$, переход от координатного представления к импульсному (в одномерном случае) производится с помощью непрерывной матрицы $\langle x|U|p\rangle = (1/\sqrt{2\pi\hbar})\exp\{ipx/\hbar\}$ и т. д.

О. U используются при преобразовании систем координат. При рассмотрении непрерывных преобразований (сдвиг, вращение) достаточно ограничиться бесконечно малым преобразованием данного типа. Напр., О. бесконечно малого смещения координат непосредственно определяется первыми членами разложения ф-ции ψ в ряд Тейлора:

$$\psi(\boldsymbol{r} + \delta\boldsymbol{r}) = [1 + (i/\hbar)\delta\boldsymbol{r}\hat{\boldsymbol{p}}]\psi(\boldsymbol{r}),$$

откуда для О. конечной трансляции $U_{r_0}\psi(\boldsymbol{r}) = \psi(\boldsymbol{r} + \boldsymbol{r}_0)$ получаем $U_{r_0} = \exp\{i\boldsymbol{r}_0\hat{\boldsymbol{p}}/\hbar\}$. Аналогичная процедура с бесконечно малым смещением во времени приводит для конечного сдвига на Δt к известному результату:

$$\psi(t + \Delta t) = \exp\{-i\hat{H}\Delta t/\hbar\}\psi(t)$$

[в представлении взаимодействия

$$\psi'(t + \Delta t) = S(t + \Delta t, t)\psi'(t),$$

где $S(t_1, t_2)$ — S-матрица]. При бесконечно малом повороте на угол $\delta\varphi$ на скалярную ф-цию $\psi(\boldsymbol{r})$ действует О. $(1 + i\delta\boldsymbol{\varphi}\hat{\boldsymbol{M}}/\hbar)$, а для частицы со спином О. $(1 + i\delta\boldsymbol{\varphi}\hat{\boldsymbol{J}}/\hbar)$. О. конечного поворота, как видно из этих ф-л, представляются матрицами $(2j + 1)$-го ранга. В релятивистской теории при бесконечно малых поворотах в четырёхмерном пространстве на угол $\delta\omega$ (при *Лоренца преобразованиях*) $x'_\mu = \alpha_{\mu\nu}x_\nu = x_\mu + \delta\omega_{\mu\nu}x_\nu$ О. преобразования ф-ции состояния можно записать как $U = {}^1/_2\, R_{\mu\nu}\delta\omega_{\mu\nu}$, где для четырёхкомпонентной ф-ции фермиона ψ О. $R_{\mu\nu}$ целиком выражается с помощью *Дирака матриц* γ_μ в виде $R_{\mu\nu} = -R_{\nu\mu} = {}^1/_4(\gamma_\mu\gamma_\nu - \gamma_\nu\gamma_\mu)$.

Дискретные преобразования U связаны не только с преобразованиями типа отражений в пространстве и времени, но и с изменением дискретных величин, таких как электрич. заряд, *барионное число*, *странность*, *очарование*, *цвет* и т. д. Приведём примеры О. дискретных преобразований, использующихся в теории релятивистских ферми-частиц, к-рые несложным образом выражаются через γ_μ: *пространственная инверсия* ($\boldsymbol{r}' \to -\boldsymbol{r}$, $x'_0 = x_0$) — $U = i\gamma_0$, *обращение времени* ($\boldsymbol{r}' = \boldsymbol{r}$, $x'_0 = -x_0$) — $U = \gamma_1\gamma_2\gamma_3$, полная инверсия ($\boldsymbol{r}' \to -\boldsymbol{r}$, $x'_0 = -x_0$) — $U = i\gamma_5$, где $\gamma_5 = -i\gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3$. Возможны и др. законы преобразования ψ при отражениях; напр., при $\boldsymbol{r}' \to -\boldsymbol{r}$ возможны (помимо упомянутого) ещё три варианта преобразования волновой ф-ции: $U = -i\gamma_0$, $U = \pm\gamma_0$ (так преобразующиеся при отражениях ψ-функции наз. псевдоспинорами). Аналогичные варианты существуют и для законов преобразований при др. отражениях. К дискретным преобразованиям примыкает операция *зарядового сопряжения*, имеющая вид $U_C = \alpha_y = \gamma_0\gamma_2$.

О. перестановок. Такие О. необходимы при рассмотрении систем двух и более одинаковых частиц. С помощью простейшего О. перестановки индексов двух частиц

$$\mathscr{P}_{ij}\psi(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_j, \ldots, x_N) = \\ = \psi(x_1, \ldots, x_j, \ldots, x_i, \ldots, x_N)$$

можно построить любой О. перестановки $\mathscr{P}$ этих индексов, представив его как произведение парных перестановок: $\mathscr{P} = \Pi\mathscr{P}_{ij}$. Оператор $\mathscr{P}_{ij}$ линеен,

$$\mathscr{P}_{ij}(\psi + \psi') = \mathscr{P}_{ij}\psi + \mathscr{P}_{ij}\psi',$$

симметричен, $\mathscr{P}_{ij} = \mathscr{P}_{ji}$, совпадает с обратным, $\mathscr{P}_{ij}^{-1} = \mathscr{P}_{ij}$, унитарен, $\mathscr{P}_{ij}^2 = I$. Т. к. в системе одинаковых частиц О. перестановки их индексов не изменяет ни О. динамич. величин (в частности, гамильтониана системы $\hat{H}$, т. е. $\mathscr{P}\hat{H} - \hat{H}\mathscr{P} = 0$), ни граничных и др. дополнит. условий, то волновые ф-ции ψ и $\mathscr{P}_{ij}\psi$, отличающиеся расположением двух индексов частиц у их аргументов, удовлетворяющие одной и той же системе ур-ний и дополнит. условий, описывают одно и то же микроскопич. состояние, т. е. $\mathscr{P}_{ij}\psi = \lambda\psi$, где $\lambda = \exp\{i\alpha\}$ — фазовый множитель. Повторное применение к этому соотношению О. $\mathscr{P}_{ij}$ определяет для собств. значения λ О. $\mathscr{P}_{ij}$ условие $\lambda^2 = 1$, т. е. $\lambda = \pm 1$ — ф-ция состояния системы одинаковых частиц по отношению к перестановкам их индексов либо симметрична, $\mathscr{P}\psi = \psi$ (случай системы бозе-частиц), либо антисимметрична, $\mathscr{P}\psi = (-1)^{\lambda_P}\psi$ (случай системы ферми-частиц), где λ_P — число парных перестановок $\mathscr{P}_{ij}$, на к-рые распадается данная перестановка $\mathscr{P}$. При этом ввиду того, что $[\hat{H}, \mathscr{P}]_- = 0$, характер симметрии волновой ф-ции является пост. свойством данной системы.

Для двух ферми-частиц О. перестановки имеет вид $\mathscr{P}_{12} = \mathscr{P}_{12}(\sigma)\mathscr{P}_{12}(\tau)\mathscr{P}_{12}(\boldsymbol{r})$, где $\mathscr{P}_{12}(\sigma)$, $\mathscr{P}_{12}(\tau)$, $\mathscr{P}_{12}(\boldsymbol{r})$ — соответственно О. обмена спинами, зарядами и координатами. Т. к. для ферми-систем $\mathscr{P}_{12} = -1$, то для О. перестановки фермионов местами $\mathscr{P}_{12}(\boldsymbol{r}) = -\mathscr{P}_{12}(\sigma)\mathscr{P}_{12}(\tau)$, где $\mathscr{P}_{12}(\sigma) = {}^1/_2(1 + \sigma_1\sigma_2)$, $\mathscr{P}_{12}(\tau) = {}^1/_2(1 + \tau_1\tau_2)$, σ_1, σ_2 — матрицы Паули, действующие на спиновые переменные каждой из частиц, а τ_1, τ_2 — совпадающие по виду с матрицами Паули операторы *изотопического спина*.

О. проектирования вводятся при необходимости выделить из всего класса допустимых волновых ф-ций $\Psi(x)$ подпространство ф-ций $\psi(x)$, удовлетворяющих определённым дополнит. требованиям (напр., подпространство ф-ций с к.-л. дополнит. ограничением на числа заполнения или ф-ций, ортогональных к заданной, и т. д.). Вследствие принципа суперпозиции любую $\Psi(x)$ можно представить как $\Psi(x) = c\psi(x) + \psi'(x)$ и выделить первое слагаемое с помощью проекционного О. P_ψ, определив его как $P_\psi\Psi = c\,\psi$, где

$$c = \int\psi^*(x)\Psi(x)dx, \quad \int\psi^*(x)\psi(x)dx = 1.$$

Из свойств P_ψ отметим его линейность и свойство $P_\psi^2 = P_\psi$. Ввиду отсутствия взаимной однозначности в сопоставлении $\Psi \to \psi$ О. проектирования P_ψ не имеет обратного себе О. P_ψ^{-1}. Следует отметить, что О. матрицы плотности ρ по природе своей является проекци-