по заранее выбранным базисным ф-циям $\{\psi_n(x)\}$ (определяющим конкретное представление как волновой ф-ции, так и действующих на неё О.), т. е. задана как вектор $\Phi(t) = \{\Phi_n(t)\}$ в бесконечномерном гильбертовом пространстве, то действие О. $\hat F$ приводит помимо умножения на число f к повороту вектора Φ в этом пространстве, а изменение его компонент $\Phi_n \to \Phi'_n$ — к перераспределению квантовомеханич. вероятностей $|\Phi_n(t)|^2$ обнаружить систему в каждом из состояний, характеризуемых $\psi_n(x)$. Ф-ции ψ и ψ' считаются нормированными на 1, т. е. вне зависимости от наличия штриха

$$\int \psi^*(t, x)\psi(t, x)dx = \sum_n |\Phi_n(t)|^2 = 1.$$

С каждым О. $\hat F$ в квантовой механике связывается ур-ние $\hat F\psi_n(x) = f_n\psi_n(x)$, определяющее его собств. значения f_n и полную систему ортонормированных собств. ф-ций ψ_n, подчинённых определённым граничным и всем необходимым общим для ψ-функций условиям. Совокупность величин $\{f_n\}$ определяет спектр возможных значений физ. величины F, а система ф-ций $\{\psi_n\}$ (каждая из к-рых характеризует состояние, в к-ром эта величина имеет значение f_n) может служить базисом пространства, в к-ром представляются все др. состояния системы.

Требование линейности О.

$$\hat F(c_1\psi_1 + c_2\psi_2) = c_1\hat F\psi_1 + c_2\hat F\psi_2$$

(где ψ_1 и ψ_2 — волновые ф-ции двух возможных состояний системы, c_1 и c_2 — числа) можно рассматривать как выражение *суперпозиции состояний принципа* в квантовой механике, условие же самосопряжённости оператора $\hat F$ обеспечивает действительность квантовомеханич. ср. значений физ. величины F, к-рые определяются как

$$\overline{F} = \int \psi^*(x)\hat F\psi(x)dx,$$

где $\psi(x)$ — волновая ф-ция состояния, для к-рого определяется ср. значение F, а $\psi^*(x)$ — её комплексно сопряжённая величина (если ψ — многокомпонентная ф-ция, то вместо ψ^* здесь стоит эрмитово сопряжённая ф-ция ψ^+). Определяя О. $\hat F^T$, транспонированный по отношению к исходному с помощью соотношения

$$\int \psi_1\hat F\psi_2 dx = \int \psi_2\hat F^T\psi_1 dx,$$

можно записать условие самосопряжённости О. $\hat F$ в виде $\hat F^+ = \hat F$, где $\hat F^+ = (\hat F^T)^*$. В случае, когда система находится в одном из состояний ψ_n, ср. значение $\overline{F}$ автоматически совпадает с собств. значением f_n. Более того, ур-ние, определяющее собств. ф-ции и собств. значения О. $\hat F$, математически эквивалентно обращению в нуль квантовомеханич. дисперсии (не только квадратичной, но и любого порядка) величины F: $\overline{(\Delta F)^2} \equiv \overline{(F - \overline{F})^2} = 0$ для состояний ψ, совпадающих с любым из ψ_n. В связи с этим говорят, что в рамках квантовомеханических представлений измерение физ. величины F может привести только к к.-л. из значений f_n.

Алгебраич. действия с О. определяются согласно ф-лам

$$(\hat F + \hat G)\psi = \hat F\psi + \hat G\psi, \quad (\hat F\hat G)\psi = \hat F(\hat G\psi).$$

Деление на О. определяется с помощью введения обратного О. $\hat F^{-1}$, такого, что $\hat F^{-1}\hat F = \hat F\hat F^{-1} = I$, где I означает О. умножения на единицу, причём $\hat F^{-1}\psi_n = f_n^{-1}\psi_n$ для $f_n \neq 0$. Если О. $\hat F$ выступает в качестве аргумента нек-рой ф-ции $\mathscr{F}(\xi)$, то О. $\mathscr{F}(\hat F)$ понимается как разложение этой ф-ции в формальный степенной ряд, в к-ром вместо степеней ξ стоят соответствующие степени О. $\hat F$,

$$\mathscr{F}(\hat F) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\left(\frac{\partial^k \mathscr{F}}{\partial \xi^k}\right)_{\xi=0}(\hat F)^k,$$

а его собств. значения непосредственно выражаются через собств. значения $\hat F$:

$$\mathscr{F}(\hat F)\psi_n = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\left(\frac{\partial^k \mathscr{F}}{\partial \xi^k}\right)_{\xi=0} f_n^k\psi_n = \mathscr{F}(f_n)\psi_n.$$

Если два О. $\hat F$ и $\hat G$ имеют одну и ту же систему собств. ф-ций, $\hat F\psi_n = f_n\psi_n$ и $\hat G\psi_n = g_n\psi_n$, то порядок действия этих О. в произведении безразличен и коммутатор этих О. равен нулю: $[\hat F\hat G]_- \equiv \hat F\hat G - \hat G\hat F = 0$. И обратно, величины F и G могут одновременно иметь определённые значения только в том случае, если коммутатор О. $\hat F$ и $\hat G$ равен нулю. В противном случае физ. величины F и G не могут (в рамках квантовой теории) одновременно иметь точные значения. Некоммутативность ряда О. физ. величин приводит к существованию соответствующих *неопределённостей соотношений* в квантовой механике. Т. к. при эрмитовом сопряжении произведения двух О. порядок их расположения меняется, $(\hat F\hat G)^+ = \hat G^+\hat F^+$, то произведение эрмитовых О. будет также эрмитовым О. только в случае, если эти О. коммутируют друг с другом.

Постановка задачи на полное определение ф-ции состояния и полного набора квантовых чисел n, характеризующих это состояние, для системы с λ степенями свободы (с обязат. включением степени свободы, связанной с возможными энергетич. состояниями) заключается в построении полного набора независимых коммутирующих друг с другом О. $\hat F_1, \ldots, \hat F_\lambda$, характеризующих положение системы по отношению к её степеням свободы, и совместном решении ур-ний

$$\hat F_i\psi_{n_1\ldots n_\lambda}(x) = f_i(n_1,\ldots,n_\lambda)\psi_{n_1\ldots n_\lambda}(x), \; i = 1,\ldots,\lambda,$$

со всеми необходимыми для волновой ф-ции ψ дополнит. условиями, соответствующими характеру рассматриваемой задачи.

Конкретное матем. выражение О. динамич. величины зависит от выбора пространства x, на к-ром определены ф-ции состояния $\psi(x)$.

О. в конфигурационном (координатном) представлении. Если волновая ф-ция системы задана как ф-ция пространств. координат и времени, $\psi = \psi(\boldsymbol r, t)$, то простейшими О., с помощью к-рых строятся все остальные О. динамич. величин, являются О. координаты $\hat{\boldsymbol r} = (\hat x, \hat y, \hat z)$, определяемый как умножение на координату $\hat{\boldsymbol r}\psi(\boldsymbol r, t) = \boldsymbol r\psi(\boldsymbol r, t)$, и О. импульса $\hat{\boldsymbol p} = (\hat p_x, \hat p_y, \hat p_z)$, являющийся дифференц. О. первого порядка:

$$\hat{\boldsymbol p}\psi(\boldsymbol r, t) = -i\hbar\nabla\psi(\boldsymbol r, t).$$

Собств. ф-ция О. координаты, соответствующая собств. значению $\boldsymbol r_0$, представляет собой *дельта-функцию* Дирака: $\psi_{\boldsymbol r_0}(\boldsymbol r) = \delta(\boldsymbol r - \boldsymbol r_0)$, а собств. ф-ция О. импульса, соответствующая собств. значению $\boldsymbol p$, — плоскую волну

$$\psi_{\boldsymbol p}(\boldsymbol r) = (1/2\pi\hbar)^{3/2}\exp\{i\boldsymbol p\boldsymbol r/\hbar\}$$

[в обоих случаях нормировка $\psi_{\boldsymbol r_0}(\boldsymbol r)$ и $\psi_{\boldsymbol p}(\boldsymbol r)$ произведена на δ-функцию]. О. любой динамич. величины $F(\boldsymbol p, \boldsymbol r)$ определяется как

$$\hat F(\boldsymbol p, \boldsymbol r) = F(\hat{\boldsymbol p}, \hat{\boldsymbol r}) = F(-i\hbar\nabla, \boldsymbol r).$$

Т. к. $\hat{\boldsymbol r}$ и $\hat{\boldsymbol p}$ не имеют общей системы собств. ф-ций, то О. динамич. величин, как правило, не коммутируют друг с другом, в частности

$$[F(\hat{\boldsymbol p}), \hat r_\alpha]_- = -i\hbar\frac{\partial \hat F}{\partial p_\alpha}; \; [\hat p_\alpha, \hat G(\hat{\boldsymbol r})]_- = -i\hbar\frac{\partial G}{\partial r_\alpha}, \; \alpha = x, y, z,$$