Точные решения. Для физики важно знать как можно больше точных решений Н. у. м. ф., особенно существенно нелинейных. Простейшие из таких решений можно находить, используя очевидные свойства симметрии Н. у. м. ф., а также отыскивая всевозможные автомодельные подстановки (см. *Автомодельность*). Более тонкие способы вычисления точных решений используют методы теории групп Ли. Пусть Н. у. м. ф. для ф-ции двух переменных $u(x,t)$ имеет вид

$$u_t = F(u, u_1, \ldots, u_n), \quad u_{\mathbf{k}} = d^{\mathbf{k}}\, u/\partial x^{\mathbf{k}}\,. \tag{6}$$

Ф-ция $f(u,u_1,\ldots,u_l,x,\tau)$ наз. симметрией уравнения (6), если оно совместно с ур-нием $u_\tau = f(u,u_1,\ldots,u_l,x,\tau)$, где τ — новая переменная. Симметрии образуют алгебру Ли относительно скобки Пуассона

$$\{f,h\} = \sum_{\mathbf{k}=0}^{l}\left(\frac{\partial f}{\partial u_{\mathbf{k}}}\frac{\partial^{\mathbf{k}} h}{\partial x^{\mathbf{k}}} - \frac{\partial h}{\partial u_{\mathbf{k}}}\frac{\partial^{\mathbf{k}} f}{\partial x^{\mathbf{k}}}\right).$$

По алгебре симметрий Н. у. м. ф. восстанавливают группу Ли — Беклунда непрерывных преобразований, оставляющих Н. у. м. ф. инвариантным. Точные решения Н. у. м. ф. находят как решения, остающиеся инвариантными при действии к.-л. подгруппы группы Ли — Беклунда. Группа Ли — Беклунда и алгебра симметрий существуют у каждого Н. у. м. ф. В большинстве случаев группа Ли — Беклунда является конечномерной. Существуют, однако, случаи, когда эта группа бесконечномерна, как у всех перечисленных выше универсальных Н. у. м. ф.

Если преобразование из группы Ли — Беклунда оставляет инвариантным функционал действия гамильтонова Н. у. м. ф., то оно имеет интеграл движения — функционал, не зависящий от времени. Интегралы движения образуют алгебру Ли относительно скобок Пуассона, изоморфную нек-рой подалгебре алгебры симметрий.

Перечисленные выше универсальные гамильтоновы Н. у. м. ф. обладают бесконечными наборами независимых интегралов движения. Ур-ния, обладающие этим свойством, несколько условно наз. интегрируемыми, хотя интегрируемость (см. *Гамильтонова система*) доказана лишь для немногих из них. Интегрируемыми являются, в частности, одномерные ур-ния Эйлера (2).

Обширный класс интегрируемых Н. у. м. ф. составляют ур-ния, к к-рым применим *обратной задачи рассеяния метод*. Для этих ур-ний, к к-рым относятся, в частности, перечисленные выше универсальные гамильтоновы системы, возможно явное вычисление большого кол-ва точных решений, в т. ч. описывающих солитоны и их взаимодействия. При помощи метода обратной задачи удаётся вычислять инстантонные решения ур-ний Янга — Миллса, а также найти многочисленные точные решения ур-ний Эйнштейна.

Если Н. у. м. ф. не обладает бесконечной группой Ли — Беклунда, возможности его аналитич. исследования сильно ограничены. В ряде случаев можно, используя разложение по набору заданных ф-ций (метод Галёркина), свести его к системе обыкновенных дифференц. ур-ний, к-рую можно изучать качеств. методами, а также интегрировать при помощи ЭВМ. Таким способом удаётся моделировать не слишком развитую турбулентность, в т. ч. изучать *странные аттракторы*. Наконец, если число независимых переменных, входящих в Н. у. м. ф., не превышает три, оказывается достаточно эффективным их прямое численное решение на ЭВМ.

Лит.: Уизем Дж., Линейные и нелинейные волны, пер. с англ., М., 1977; Теория солитонов. Метод обратной задачи, М., 1980; Ablowitz M. J., Segur H., Solitons and the inverse scattering transform, Phil., 1981; Ибрагимов Н. Х., Группы преобразований в математической физике, М., 1983.

В. Е. Захаров.

НЕЛИНЕ́ЙНЫЕ ЯВЛЕ́НИЯ В ПЛА́ЗМЕ — возникают в результате взаимодействия волн, полей и частиц, при к-рых не выполняется принцип суперпозиции волн и к-рые описываются с учётом нелинейных слагаемых в ур-ниях кинетики или динамики плазмы и в ур-ниях Максвелла. Плазма, в особенности магнитоактивная,— уникальная нелинейная среда, в к-рой нелинейные явления связаны не только с большим числом эл.-магн. волн разл. типов поляризаций и пространственно-временны́х масштабов, но и с существованием резонанса заряж. частиц с волнами и их биениями, а также волновых движений частиц, не приводящих к возбуждению эл.-магн. полей (т. н. моды Ван-Кампена). Это приводит к тому, что в плазме возникают не только практически все нелинейные явления, к-рые характерны для др. нелинейных сред (самофокусировка волн, их укручение, самосжатие пакетов волн, распадная, модуляц. и взрывная неустойчивости, вынужденное комбинац. рассеяние волн, обращение волнового фронта, генерация гармоник, образование солитонов и ударных волн и т. п.), но и явления, отсутствующие в др. средах, такие, как индуциров. рассеяние заряж. частиц, квазилинейная релаксация и слабая турбулентность, эффекты фазовой памяти частиц, приводящие к плазменному эху, нелинейное затухание Ландау (резко отличное от линейного), сателлитные неустойчивости волн и т. п. В отличие от нелинейной акустики и нелинейной оптики, Н. я. в п. возникают при достаточно малых амплитудах волн, что позволяет говорить о ней как о среде с резко нелинейными волновыми свойствами. Как и в др. нелинейных волновых средах, в плазме различают два типа нелинейных волновых явлений — ламинарные, с динамически меняющимися или фиксиров. фазами волн, и турбулентные, с хаотически меняющимися фазами волн. В ламинарной, или динамич., теории Н. я. в п. особое место занимают периодич. волны, для к-рых обычно характерны три типа взаимодействий: волна — волна; волна — частица; волна — частица — волна. Два последних типи́чны именно для плазмы. Взаимодействие первого типа основано на резонансе трёх волн: биение, образованное двумя волнами, попадает в резонанс с третьей волной. В этом случае необходимо одноврем. выполнение условий как временно́го резонанса: $\omega_1 = \omega_2 + \omega_3$, так и пространственного: $\mathbf{k}_1 = \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3$, где ω_i и $\mathbf{k}_i$ — соответственно частоты и волновые векторы резонансно взаимодействующих волн. Условие временно́го резонанса (помноженное на $\hbar$) совпадает с условием распада элементарного возбуждения $\mathscr{E}_1(\omega_1,\mathbf{k}_1)$ на два других: $\mathscr{E}_2(\omega_2,\mathbf{k}_2)$ и $\mathscr{E}_3(\omega_3,\mathbf{k}_3)$. Поэтому их часто наз. распадными условиями, а соответствующий процесс — распадным взаимодействием волн.

Второй тип взаимодействия (волна — частица) можно считать почти линейным. Взаимодействие является наиб. сильным, когда частицы находятся в резонансе с волнами. В плазме без магн. поля условия резонанса частицы, имеющей скорость v, с волной имеют вид: $\boldsymbol{v} = \omega/\mathbf{k}$. Такое взаимодействие на примере ленгмюровских (эл.-статических) волн ведёт к захвату частиц в потенц. яму волны, следствием чего является *Ландау затухание*.

При взаимодействии волна — частица — волна биение от двух волн попадает в резонанс с частицами $\omega_1 - \omega_2 = (\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2)\boldsymbol{v}$ или $\boldsymbol{v} = (\omega_1 - \omega_2)/(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2)$. Часто такое взаимодействие наз. нелинейным затуханием Ландау либо индуциров. рассеянием частиц на волнах.

Кроме явлений взаимодействия волн и частиц к Н. я. в п. относится также самовоздействие волн; простейшим типом последнего является процесс рождения кратных гармоник. Так, напр., генерация 2-й гармоники возникает за счёт того, что происходит «взаимодействие» волны самой с собой, когда частота биения есть 2ω, а волновой вектор $2\mathbf{k}$. Это биение может либо попасть, либо не попасть в резонанс с собств. колебанием плазмы. Условием резонанса биения с собств. колебанием является $2\omega/2\mathbf{k} = \omega(2\mathrm{k})/2\mathrm{k}$, где $\omega(2\mathbf{k})$ — частота