Нелинейные уравнения в физике. Н. у. м. ф., встречающиеся в физике, отличаются большим разнообразием. Их значит. часть представляет собой обобщения гидродинамич. ур-ний Эйлера, напр. *Навье — Стокса уравнения* для описания движений вязкой несжимаемой жидкости. Описываемая ими гидродинамич. турбулентность является предельно сильной.

В метеорологии были выведены ур-ния Буссинеска, описывающие движения несжимаемой жидкости в поле тяжести и сил Кориолиса и используемые в океанологии и физике атмосферы. Ур-ния *магнитной гидродинамики* описывают движение проводящей жидкости в магн. поле и применяются в астрофизике и физике плазмы.

Классич. примером Н. у. м. ф. являются уравнения теории упругости. Развитие микроскопической теории кристаллов дополнило их уравнениями равновесия и динамики дислокаций, также существенно нелинейными.

Многие Н. у. м. ф. возникли в физике в связи с развитием теории конденсиров. сред, они описывают макроскопич. проявления квантовомеханич. эффектов; неизвестной ф-цией в них является плотность параметра порядка (см. *Фазовый переход*). Если параметр порядка скалярный, это двухжидкостные ур-ния гидродинамики сверхтекучего гелия (см. *Сверхтекучесть*), ур-ния Гинзбурга — Ландау и их обобщения, описывающие магнетостатику и электродинамику сверхпроводников (см. *Сверхпроводимость*). Если параметр порядка векторный или тензорный, это ур-ния Ландау — Лифшица, описывающие ферромагнетики и антиферромагнетики, ур-ния обобщённой гидродинамики сверхтекучего гелия, макроскопич. модели жидких кристаллов. Для всех этих ур-ний наиб. интерес представляют их существенно нелинейные решения, часто описывающие локализованные (хотя бы частично) объекты: вихри в жидком гелии и в сверхпроводниках, доменные стенки в ферромагнетиках и антиферромагнетиках, дисклинации в жидких кристаллах и солитоны, к-рые в том или ином виде существуют во всех упомянутых средах.

Н. у. м. ф. возникают также как результат применения приближения Хартри — Фока к многочастичным квантовомеханич. системам и имеют в этом качестве применения в атомной и ядерной физике. Ещё одним источником Н. у. м. ф. является хим. физика. Это — Н. у. диффузии, описывающие волны горения и детонации, а также колебат. хим. реакции (см. *Автоволны*). К ним примыкают возникшие в биофизике ур-ния, описывающие распространение импульса по нервному волокну. Ур-ния этих типов возникают в задачах о самоорганизации (см. *Синергетика*) и *диссипативных структурах*.

Н. у. м. ф. играют важную роль и в фундам. физике, напр. ур-ния Эйнштейна для гравитац. поля (см. *Тяготение*). Ур-ния Эйнштейна в вакууме имеют ясный геом. смысл, описывая римановы пространства, *Риччи тензор* к-рых равен нулю. Геом. интерпретацию имеют и мн. Н. у. в квантовой теории поля, в частности *Янга — Миллса поля*.

Локализов. решения Н. у. м. ф. в квантовой теории поля можно рассматривать как точки стационарной фазы при квазиклассич. вычислении *функциональных интегралов*, для *Грина функций*, содержащих информацию о спектре масс и сечениях взаимодействия элементарных частиц. Если точкам стационарной фазы соответствуют траектории подбарьерных переходов между топологически неэквивалентными вырожденными состояниями вакуума, классич. Н. у. м. ф. следует рассматривать в мнимом времени, т. е. не в пространстве Минковского, а в четырёхмерном евклидовом пространстве. Локализов. решения таких ур-ний — четырёхмерные солитоны — получили назв. *инстантонов*.

Ур-ния Янга — Миллса описывают частицы, обладающие *асимптотической свободой*. В двумерном пространстве-времени этим же свойством обладает ур-ние $\boldsymbol{n}$-поля:

$$\boldsymbol{n}_{\xi\eta} + \boldsymbol{n}(\boldsymbol{n}_{\xi}\,\boldsymbol{n}_{\eta}) = 0 \qquad (3)$$

(здесь $\xi = x + t$, $\eta = x - t$ — «конусные» переменные). Это ур-ние является частным случаем более общего ур-ния «главного кирального поля»

$$g_{\xi\eta} + (g_{\xi}\, g^{-1} g_{\eta} + g_{\eta}\, g^{-1} g_{\xi})/2 = 0 \qquad (4)$$

(здесь g — элемент нек-рой группы Ли). Инстантонные решения этого ур-ния можно использовать для описания солитонных конфигураций в жидком гелии.

Универсальные модели. В этих моделях проявляется одна из характерных черт теории Н. у. м. ф.: среди огромного их многообразия можно выделить небольшое число ур-ний сравнительно простого вида, к-рые можно использовать как матем. модели различных по своей природе физ. ситуаций. Эти ур-ния играют, в известном смысле, ту же роль, что и классич. ур-ния в частных производных (ур-ние Лапласа, ур-ние диффузии, волновое ур-ние).

К числу таких универсальных моделей относятся *Кортевега — де Фриса уравнение*, *Шрёдингера уравнение нелинейное*, *синус-Гордона уравнение*, *Кадомцева — Петвиашвили уравнение*, *Бюргерса уравнение*, *Хохлова — Заболотской уравнение* и др. Необходимо отметить еще систему ур-ний «трёх волн»:

$$\begin{aligned} \partial u_0/\partial t + (\boldsymbol{v}_0 \nabla u_0) &= i u_1 u_2, \\ \partial u_1/\partial t + (\boldsymbol{v}_1 \nabla u_1) &= i u_0 \overset{*}{u}_2, \\ \partial u_2/\partial t + (\boldsymbol{v}_2 \nabla u_2) &= i u_0 \overset{*}{u}_1, \end{aligned} \qquad (5)$$

являющуюся универсальной моделью для описания параметрич. взаимодействий волн в нелинейных средах. Система (5) допускает многочисл. обобщения.

Большое разнообразие встречающихся в физике Н. у. м. ф. затрудняет развитие общих матем. методов их исследования. Лишь для сравнительно немногих Н. у. м. ф. доказаны теоремы существования и единственности, к таким относятся ур-ния Янга — Миллса, ур-ния Навье — Стокса в двумерном случае, ур-ния газовой динамики. Для ур-ний Навье — Стокса в трёхмерном случае теорема единственности решения задачи Коши до сих пор не доказана. Затруднена даже проблема классификации Н. у. м. ф. Часть их попадает под классич. разделение на эллиптич., гиперболич. и параболич. ур-ния, но значит. число важных Н. у. м. ф. (среди них Кортевега — де Фриса ур-ние, Кадомцева — Петвиашвили ур-ние) не могут быть отнесены ни к одному из этих типов. Нек-рую классификацию Н. у. м. ф. можно осуществить на основе физ. соображений. Прежде всего это разделение на стационарные и эволюц. ур-ния. Большинство стационарных ур-ний относится к эллиптич. типу. Среди эволюц. ур-ний, явно содержащих производные по времени, можно выделить консервативные Н. у. м. ф., сохраняющие интеграл энергии, и диссипативные Н. у. м. ф., описывающие «открытые системы», обменивающиеся энергией с «внешним миром». Одним из интересных достижений теории Н. у. м. ф. было обнаружение того факта, что консервативные Н. у. м. ф., как правило, являются гамильтоновыми системами, хотя явное введение канонич. переменных зачастую оказывается трудной задачей. Установлена гамильтонова природа большинства консервативных обобщений ур-ний Эйлера и даже системы ур-ний Власова, описывающих плазму без столкновений. Для гамильтоновых систем, близких к линейным, развиты методы теории возмущений, позволяющие учитывать нелинейные эффекты и производить статистич. описание решений. Все перечисленные выше универсальные Н. у. м. ф., за исключением Бюргерса ур-ния и Хохлова — Заболотской ур-ния, являются гамильтоновыми.