Матем. выражение Н. д. п. в этом случае имеет вид

$$\Delta S_0 = 0, \qquad (2)$$

где Δ — символ полной вариации (в отличие от принципа Гамильтона — Остроградского, здесь варьируются не только координаты и скорости, но и время перемещения системы из одной конфигурации в другую).

Н. д. п. в форме (2) справедлив только для консервативных и притом *голономных систем*. Н. д. п. в форме (1) является более общим и, в частности, может быть распространён на неконсервативные системы. Н. д. п. пользуются для составления ур-ний движения механич. систем и для исследования общих свойств этих движений. При соответствующем обобщении понятий Н. д. п. находит приложения в механике непрерывной среды, в электродинамике, квантовой механике и др.

Лит. см. при статьях *Вариационные принципы механики, Действие* и *Динамика*. *С. М. Тарг.*

НАИМЕ́НЬШЕГО ПРИНУЖДЕ́НИЯ ПРИ́НЦИП — см. *Гаусса принцип.*

НАИМЕ́НЬШЕЙ КРИВИЗНЫ́ ПРИ́НЦИП — см. *Герца принцип.*

НАИМЕ́НЬШИХ КВАДРА́ТОВ МЕ́ТОД — метод оценивания неизвестных параметров теоретич. моделей по косвенным измерениям при параметрич. анализе данных (см. *Анализ данных*). Н. к. м. был предложен К. Гауссом (C. Gauß, 1809) для задач геодезии и астрономии в след. формулировке. Пусть существует модель явления, в к-рой $\boldsymbol{x}$ — вектор аргументов, $\boldsymbol{a}$ — вектор неизвестных параметров. Для определения параметров $\boldsymbol{a}$ проводятся косвенные измерения, т. е. измеряются не сами параметры $\boldsymbol{a}$, а ф-ции этих параметров $f(\boldsymbol{x}\,|\,\boldsymbol{a})$, вычисляемые согласно модели. Благодаря ошибкам измерения ε_n результаты измерения Y_n равны

$$Y_n = f(x_n|\boldsymbol{a}) + \varepsilon_n.$$

Относительно ε_n предполагается, что они являются чисто случайными величинами, т. е. при многократном проведении измерений их ср. значения равны нулю, $M(\varepsilon_n) = 0$, $M(Y_n) = f(x_n|\boldsymbol{a})$, а также что они некоррелированы и их дисперсии равны σ_n^2, $M(\varepsilon_n\varepsilon_m) = \sigma_n^2\delta_{nm}$. Согласно Гауссу, в качестве оценки $\boldsymbol{a}$ (оценки Н. к. м.) следует взять величину $\hat{\boldsymbol{a}}$, минимизирующую выражение

$$\Phi = \sum_{n=1}^{N}\left(\frac{Y_n - f(x_n\,|\,\boldsymbol{a})}{\sigma_n^2}\right)^2.$$

При этом подразумевается, что число измерений $N \geqslant I$, где I — число неизвестных параметров a_i.

Обобщением метода на случай коррелиров. ошибок измерения, $M(\varepsilon_n\varepsilon_m) = \Sigma_{nm}$, является поиск величины $\hat{\boldsymbol{a}}$ из условия минимума квадратичной формы

$$\Phi = \sum_{n,m}(Y_n - f(\boldsymbol{x}_n|\boldsymbol{a}))\Sigma_{nm}^{-1}(Y_m - f(\boldsymbol{x}_m|\boldsymbol{a})). \qquad (1)$$

Н. к. м. используют при обработке результатов наблюдений, в разл. задачах *регрессионного анализа* и т. д. Напр., в физике элементарных частиц его применяют для оценки импульса частицы по измерениям координат точек её траектории в магн. поле и оценки параметров плотности распределения $p(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{a})$ случайной величины $\boldsymbol{x}$ по числу событий Y_n в ячейках *гистограммы.*

Оптимальность оценки Н. к. м. Использование метода обусловлено оптим. свойствами его оценки для моделей с линейной зависимостью $M(Y_n) = f(\boldsymbol{x}_n|\boldsymbol{a})$ от параметров $\boldsymbol{a}$. Рассмотрим их. Итак, пусть

$$Y_n = \sum_{i=1}^{I} A_{ni}a_i + \varepsilon_n. \qquad (2)$$

Выражение (1) в этом случае кратко записывается в виде

$$\Phi = (\boldsymbol{Y} - A\boldsymbol{a})^T\Sigma^{-1}(\boldsymbol{Y} - A\boldsymbol{a}),$$

где T — символ транспонирования. В предположении, что ранг матрицы A больше или равен I, оценка Н. к. м. равна

$$\hat{\boldsymbol{a}} = (A^T\Sigma^{-1}A)^{-1}A^T\Sigma^{-1}\boldsymbol{Y}. \qquad (3)$$

Из (3) следует, что $\hat{\boldsymbol{a}}$ является линейной оценкой, т. е. линейной ф-цией измерений Y_n. Если усреднить (3) по ошибкам измерения, то оказывается, что

$$M(\hat{\boldsymbol{a}}) = \boldsymbol{a},$$

т. е. оценка является несмещённой.

Благодаря ошибкам измерения $\hat{\boldsymbol{a}}$ имеет шумовую составляющую, к-рая характеризуется матрицей ошибок (*ковариационной матрицей*):

$$K = M\{[\hat{\boldsymbol{a}} - M(\hat{\boldsymbol{a}})][\hat{\boldsymbol{a}} - M(\hat{\boldsymbol{a}})]^T\} = (A^T\Sigma^{-1}A)^{-1}.$$

Диагональные элементы K_{ii} являются дисперсиями ошибок, содержащихся в $\hat{a}_i$.

В исследование оптимальности Н. к. м. внёс вклад А. А. Марков, к-рый в 1900 доказал след. утверждение (теорема Гаусса — Маркова): среди всех линейных несмещённых оценок минимальными дисперсиями K_{ii} обладает оценка (3), т. е. оценка Н. к. м.

В том случае, когда $\Sigma = \sigma^2\hat{\Sigma}$, где σ^2 — неизвестный параметр, $\hat{\Sigma}$ — известная матрица, несмещённой оценкой σ^2 является величина

$$\hat{\sigma}^2 = \Phi(\boldsymbol{a} = \hat{\boldsymbol{a}})/(N - I).$$

Величину $N - I$ наз. числом степеней свободы.

Подчеркнём, что перечисленные оптим. свойства оценки Н. к. м. не зависят от вида распределения вектора $\boldsymbol{\varepsilon}$, а лишь от предположения справедливости линейной связи (2).

Иногда оказывается, что между искомыми параметрами a_i существует связь, отражающая физ. закономерность:

$$g_l(\boldsymbol{a}) = b_l, \quad l = 1, \ldots, L. \qquad (4)$$

Напр., импульсы всех частиц в точке взаимодействия удовлетворяют закону сохранения 4-импульса. Учёт такой априорной информации приводит к уменьшению ошибок оценок параметров.

Если связи (4) линейны, т. е.

$$\sum_{i=1}^{I} G_{li}a_i = b_l, \quad l = 1, \ldots, L, \qquad (5)$$

то оценка $\hat{\boldsymbol{a}}$ Н. к. м., удовлетворяющая (5), имеет вид

$$\hat{\boldsymbol{a}}_G = [(A^T\Sigma^{-1}A)^{-1} - D]A^T\Sigma^{-1}\boldsymbol{Y} + C^T\boldsymbol{b}, \qquad (6)$$

где

$$D = (A^T\Sigma^{-1}A)^{-1}G^T[G(A^T\Sigma^{-1}A)^{-1}G^T]^{-1}G(A^T\Sigma^{-1}A)^{-1},$$

$$C = [G(A^T\Sigma^{-1}A)^{-1}G^T]^{-1}G(A^T\Sigma^{-1}A)^{-1}.$$

Можно убедиться, что оценка (6) является несмещённой, а для её матрицы ошибок K_G выполняется

$$K_G = K - D < K, \quad K_{G_{ii}} < K_{ii},$$

т. к. D — положительно определённая матрица.

В случае нелинейных связей (4) задача построения оценки Н. к. м., удовлетворяющей (4), существенно усложняется и решается численными методами.

Разновидности Н. к. м. Важным частным случаем Н. к. м. является χ^2-метод, к-рый используется при работе с данными, сгруппированными в гистограмму. В этом случае Y_n есть числа событий в ячейках гистограммы. При больших значениях Y_n их можно рассматривать как независимые случайные величины,