В ур-нии (3) фигурируют сферич. ф-ции

$$Y_{lm}(n) = (-1)^{\frac{m+|m|}{2}} i^l \sqrt{\frac{(2l+1)(l-|m|)!}{4\pi(l+|m|)!}} P_l^{|m|}(\cos\theta)\exp(im\varphi),$$

ортонормированные интегралом по сфере единичного радиуса:

$$\int Y_{lm} Y^*_{l'm'} d\Omega = \delta_{ll'}\delta_{mm'},$$

где θ, φ — полярный и азимутальный углы направления $n = r/r$, $P_l^{|m|}$ — присоединённые полиномы Лежандра, $\delta_{ll'}$ — *Кронекера символ* (звёздочка означает комплексное сопряжение). Они являются *собственными функциями* операторов $\hat{L}^2$ и $\hat{L}_z$:

$$\hat{L}^2 Y_{lm} = l(l+1)Y_{lm}, \ \hat{L}_z Y_{lm} = mY_{lm},$$

где $\hat{L} = -i[r\nabla]$ — оператор орбитального момента импульса, ось z — заданное направление в пространстве, $\cos\theta = n_z$, $-l \leqslant m \leqslant l$ (l и $|m|$ — натуральные числа). В (3) и (5) входят сферич. ф-ция Ганкеля h_l (с особенностью в нуле) и регулярная (без особенности в нуле) сферич. ф-ция Бесселя j_l (см. *Цилиндрические функции*). Величины

$$N_{lm}(r) = -i\left(\frac{c}{\omega}\right)[\nabla M_{lm}(r)], \ \tilde{N}_{lm}(r) = -i\left(\frac{c}{\omega}\right)[\nabla \tilde{M}_{lm}(r)],$$

$$M_{lm}(r) = h_l\left(\frac{r\omega}{c}\right)X_{lm}(n), \ \tilde{M}_{lm}(r) = j_l\left(\frac{r\omega}{c}\right)X_{lm}(n),$$

определяющие электрич. и магн. мультипольные поля, выражаются через ортонормированные векторные сферич. ф-ции

$$X_{lm}(n) = [l(l+1)]^{-1/2}\hat{L}Y_{lm}(n), \tag{8}$$

к-рые являются собств. ф-циями операторов $[\hat{L}]$, $\hat{L}^2$, $\hat{S}^2$, $\hat{J}^2$ и $\hat{J}_z$, отвечающими *собственным значениям* l, $l(l+1)$, $s(s+1)$, $j(j+1)$ и m соответственно. Оператор полного момента импульса $\hat{J} = \hat{L} + \hat{S}$ включает оператор спина фотона $\hat{S}$, к-рый действует на векторную ф-цию $a(r)$ по правилу $\hat{S}_p a_q = -i\varepsilon_{pq\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}}$, где $\varepsilon_{pq\mathbf{k}}$ — *Леви-Чивиты символ*, числа p, q, k принимают значения 1, 2, 3 (по **k** — суммирование). Для ф-ций (8) $s = 1$, а собств. значения операторов $\hat{L}^2$ и $\hat{J}^2$ совпадают: $j = l$. Величины

$$L_{lm} = -i\left(\frac{c}{\omega}\right)\nabla\left[h_l\left(\frac{r\omega}{c}\right)Y_{lm}(n)\right] -$$

продольные «мультипольные потенциалы», к-рые в пустоте не дают никакого эл.-магн. поля (в силу его ненулевой *спиральности*), но сохранены в (4) для полноты разложения.

Используя соотношения

$$\nabla N_{lm} = 0, \quad [\nabla N_{lm}] = -i\left(\frac{\omega}{c}\right)M_{lm},$$

$$\nabla M_{lm} = 0, \quad [\nabla M_{lm}] = i\left(\frac{\omega}{c}\right)N_{lm},$$

$$\nabla L_{lm} = i\left(\frac{\omega}{c}\right)Y_{lm}, \quad [\nabla L_{lm}] = 0,$$

находим фурье-образы электрич. и магн. полей М. и.:

$$E(r, \omega) = -\frac{4\pi\omega^2}{c^3}\sum_{l,m}[n_{lm}N_{lm}(r) + m_{lm}M_{lm}(r)],$$

$$B(r, \omega) = \frac{4\pi\omega^2}{c^3}\sum_{l,m}[n_{lm}M_{lm}(r) - m_{lm}N_{lm}(r)]. \tag{9}$$

Т. о., вне источников (т. е. в области, где $j = 0$, $\rho = 0$) поля М. и. распадаются на два типа — электрического (в них магн. поле поперечно, поскольку $M_{lm} \perp r$) и магнитного (в них поперечно электрич. поле). О первых слагаемых в (9), отвечающих состоянию поля с полным моментом $j = l$ и *чётностью* $(-1)^j$, говорят как об электрич. 2^j-польных фотонах, а о вторых слагаемых в (9) с моментом $j = l$ и чётностью $(-1)^{j+1}$ — как о магн. 2^j-польных фотонах. Соответствующие фурье-амплитуды полей этих двух типов задаются набором фурье-компонентов мультипольных моментов $n_{lm}(\omega)$ и $m_{lm}(\omega)$, к-рые определяются свойствами системы или индуцируются внеш. полями (телами).

Мультиполи наз. внешними, если их поля рассматриваются во внешней (по отношению к источникам) области, и внутренними — при рассмотрении их полей внутри системы, но в области, свободной от источников. В области, занятой источниками, такое простое представление невозможно, поскольку амплитуды полей (3), (4) зависят от координат и, кроме того, существенно наличие продольных «мультипольных потенциалов» $4\pi i(\omega/c)\rho_{lm}L_{lm}$. Более того, величины (5) — (7) не дают полного описания распределения зарядов и токов в источнике и особенностей их взаимодействия с внеш. полем; в общем случае необходимо ещё задание т. н. $(2n + l)$-степенных радиусов распределения плотности заряда и тока. Последние определяются интегралами вида

$$\overline{r_q^{2n}} = Q^{-1}\int \rho(r, \omega)r^{2n}d^3r \text{ — для заряда } (q),$$

$$\overline{r_d^{2n+1}} = Q^{-1}\int \rho(r, \omega)rr^{2n}d^3r \text{ — для электрич. диполя } (d) \text{ и}$$

аналогично для др. мультиполей ($Q = \int \rho d^3r, n = 1, 2\ldots$).

В отличие от статич. предела ($\omega = 0$) для гармонически колеблющихся зарядов определение электрич. n_{lm} (но не магн. m_{lm}) мультипольных моментов содержит существ. дополнит. особенность. Интеграл в (6) можно выразить в эквивалентной форме, явно выделив зарядовый и токовый вклады:

$$n_{lm} = ic[l(l+1)]^{-1/2}\int \rho(r, \omega)Y^*_{lm}(n)\frac{d}{dr}\left[rj_l\left(\frac{r\omega}{c}\right)\right]d^3r -$$

$$-\left(\frac{\omega}{c}\right)[l(l+1)]^{-1/2}\int rj(r, \omega)j_l\left(\frac{r\omega}{c}\right)Y^*_{lm}(n)d^3r. \tag{10}$$

Наряду с осциллирующей плотностью заряда [входящей в (10) аналогично случаю электростатики, но с учётом эффектов запаздывания] электрич. мультипольный момент формируется также осциллирующей плотностью радиального тока. Это обстоятельство приводит к независимой, новой (по отношению к электро- и магнитостатике, ср. *Мультиполи*) системе т. н. тороидных мультиполей, простейшим представителем к-рой является *анаполь* — тор с токами, текущими строго по его меридианам. Согласно (10) и ур-нию непрерывности $i\omega\rho(r,\omega) = \nabla j(r, \omega)$, величина тороидных моментов на два порядка по частоте выше, чем зарядовых моментов того же ранга, и на один порядок выше, чем магн. моментов. Магн. мультипольные моменты, как и в магнитостатике, обусловлены плотностью поперечного ($\perp r$) тока, напр. в случае тора — токами, текущими по его параллелям. Необходимость введения тороидных моментов, независимых не только от зарядовых, но и от магн. моментов, становится очевидной, если представить плотность тока в виде

$$j(r, \omega) = \nabla\eta(r, \omega) + [\nabla f(r, \omega)]$$

и учесть, что вихревое поле $f(r,\omega)$ описывается как минимум двумя скалярными ф-циями, напр.:

$$f(r, \omega) = i\hat{L}\psi(r, \omega) + i[\nabla\hat{L}\chi(r, \omega)].$$

Тороидные моменты отсутствуют в случае чисто продольного тока ($\nabla\eta$), когда $f = 0$, и порождаются той (радиальной) частью тока ($[\nabla f]$), к-рая остаётся неучтён-