где det — определитель М. к., Sp — её шпур. Величина P является, т. о., инвариантом. Для полностью поляризованного и неполяризованного полей $P=1$ и $P=0$ соответственно. В случае $0<P<1$ поле частично поляризовано.

Лит.: Шерклифф У., Поляризованный свет. Получение и использование, пер. с англ., М., 1965; Борн М., Вольф Э., Основы оптики, пер. с англ., 2 изд., М., 1973; Перина Я., Когерентность света, пер. с англ., М., 1974; Поздняк С. И., Мелитицкий В. А., Введение в статистическую теорию поляризации радиоволн, М., 1974; Потехин В. А., Татаринов В. Н., Теория когерентности электромагнитного поля, М., 1978. *А. С. Чиркин.*

МАТРИЦА ПЛОТНОСТИ (статистический оператор) — оператор, при помощи к-рого можно вычислить ср. значение любой физ. величины в квантовой статистич. механике и, в частности, в квантовой механике. Термин «М. п.» связан с тем, что статистич. оператор обычно задаётся в матричной форме и определяет плотность вероятности. М. п. введена Дж. фон Нейманом (J. von Neumann) и Л. Д. Ландау в 1927.

В квантовой механике ср. значение физ. величины, представляемой оператором $\hat{A}$, в квантовом состоянии, к-рое описывается волновой ф-цией $\psi(x)$, равно

$$\bar{A}=(\psi^*,\hat{A}\psi)=\int\psi^*(x)\hat{A}\psi(x)dx,$$

$*$ означает комплексное сопряжение (для частиц со спином нужно учесть зависимость волновой ф-ции от спиновых переменных и, кроме интегрирования, выполнить суммирование по возможным значениям спина). Соответствующий статистич. ансамбль наз. **чистым ансамблем**, а состояние, к-рое можно описать волновой ф-цией,— «чистым» состоянием. Вся квантовая механика, за исключением нек-рых вопросов теории измерений, основана на применении чистых ансамблей.

Квантовая статистич. механика основана на использовании статистич. ансамбля более общего типа, а именно **смешанного ансамбля** (или смеси состояний), к-рый характеризуется заданием лишь вероятностей $w_1, w_2,\dots$ пребывания системы в разл. квантовых состояниях, описываемых волновыми ф-циями $\psi_1, \psi_2,\dots$. Для такого ансамбля ср. значение величины $\hat{A}$ определяется ф-лой

$$\bar{A}=\sum_k w_k(\psi_k^*,\hat{A}\psi_k),\quad \sum_k w_k=1,\ w_k>0,$$

к-рую можно записать в виде

$$\bar{A}=\mathrm{Sp}(\hat{A}\rho)=\iint A(x,x')\rho(x',x)dxdx',$$

$$\rho(x,x')=\sum_k w_k\,\psi_k(x)\,\psi_k^*(x'),$$

где Sp — след оператора, а $\rho(x, x')$ — М. п. в x-представлении, x — совокупность одночастичных координат $x_1, x_2, \dots, x_n$, для частиц со спином x_i включает спин σ_i. Матричный элемент оператора $\hat{A}$ в x-представлении определяется соотношением

$$A(x,x')=\sum_{k,k'}\psi_k(x)(\hat{A})_{kk'}\psi_{k'}^*(x').$$

Чистое состояние есть частный случай смешанного, когда вероятность состояния k равна 1, а вероятность остальных — нулю. В этом случае М. п. равна произведению волновых ф-ций

$$\rho(x,x')=\psi_k(x)\psi_k^*(x').$$

В общем случае М. п. нельзя представить в такой форме, преобразуя волновые ф-ции. Описание системы с помощью М. п. является неполным с точки зрения квантовой механики, т. к. оно не основано на максимально полном наборе данных, как при описании с помощью волновой ф-ции, но в статистич. механике эта «неполнота», как правило, не является недостатком. Полное описание системы очень большого числа частиц не только чрезвычайно сложно, но и излишне, поскольку для таких систем проявляются статистич. закономерности. Однако для осн. состояния квантовомеханич. систем с большим числом частиц иногда удаётся в нек-ром приближении теоретически рассчитать волновые ф-ции и пользоваться чистым ансамблем.

Физ. смысл М. п. можно пояснить, рассматривая подсистему с координатами x квантовомеханич. изолиров. системы с координатами q, x, к-рая описывается волновой ф-цией $\psi(q, x)$. Ср. значение величины $\hat{A}$, относящейся к подсистеме и зависящей лишь от x, равно

$$\bar{A}=\iint\psi^*(q,x)\hat{A}\psi(q,x)dqdx.$$

Определяя линейный оператор $\hat{A}$ в матричном координатном представлении с помощью соотношения

$$\hat{A}\psi(q,x)=\int A(x,x')\psi(q,x')dx',$$

получаем для ср. значения оператора выражение

$$\bar{A}=\iiint\psi^*(q,x')\psi(q,x)A(x,x')dxdx'dq=$$
$$=\iint\rho(x',x)A(x,x')dxdx'=\mathrm{Sp}(\rho\hat{A}),$$

где

$$\rho(x,x')=\int\psi(q,x)\psi^*(q,x')dq\ —$$

М. п. подсистемы x. Диагональные элементы М. п. $\rho(x, x')$ определяют вероятности координат подсистемы. Т. о., состояние подсистемы описывается не волновой ф-цией, а М. п.

М. п. обладает след. свойствами: из нормировки вероятности вытекает, что $\mathrm{Sp}\rho=\sum_k w_k=1$, М. п.— эрмитова, т. е. $\rho(x, x')=\rho^*(x', x)$, и, кроме того, симметрична относительно переменных $x_1, \dots, x_N$ (или $x'_1, \dots, x'_N$), включая спиновые переменные, для *Бозе — Эйнштейна статистики* и антисимметрична для *Ферми — Дирака статистики*.

Если М. п. удовлетворяет условию $\rho^2=\rho$, то рассматриваемая система находится в чистом состоянии и обладает определ. волновой ф-цией. Действительно, когда ρ приведено к диагональной форме, это означает, что к.-л. один из матричных элементов ρ_{nn} равен 1, а остальные элементы равны нулю. Для любой физ. величины $\hat{A}$ тогда имеем $\bar{A}=A_{nn}$, что соответствует наличию определ. волновой ф-ции ψ_n. В этом случае нет необходимости вводить М. п.

М. п. удовлетворяет квантовому ур-нию Лиувилля

$$i\hbar\partial\rho/\partial t=[H,\rho]=H\rho-\rho H,$$

аналогичному ур-нию Лиувилля в классич. статистич. механике. Это ур-ние получается из того факта, что $\psi_k(x)$ удовлетворяет ур-нию Шрёдингера. В стационарном состоянии $\partial\rho/\partial t=0$ и $[\hat{H}, \rho]=0$, т. е. М. п.— интеграл движения. Это свойство является исходным при построении равновесных статистич. ансамблей и перенесении идей Гиббса в квантовую статистику. Напр., для микроканонич. ансамбля $w(\mathscr{E}_k)=\mathrm{const}$ при $\mathscr{E}\leqslant\mathscr{E}_k\leqslant\mathscr{E}+\Delta\mathscr{E}$, $\Delta\mathscr{E}\ll\mathscr{E}$ и $w=0$ вне этого интервала, где $\mathscr{E}_k$ — собств. значение гамильтониана H. Для канонич. ансамбля

$$w(\mathscr{E}_k)=\exp[(F-\mathscr{E}_k)/\theta]$$

(F — свободная энергия, или энергия Гельмгольца; $\theta=kT$; T — абс. темп-ра). В этом случае $\rho=\exp[(F-H)/\theta]$ или, в матричной форме,

$$\rho(x,x')=\sum_k\psi_k^*(x')\exp[(F-H)/\theta]\psi_k(x).$$

М. п. применяют в теории необратимых процессов. Если при $t\to\infty$ система с гамильтонианом H нахо-