Если М. A порядка n имеет n разл. собств. значений $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$, то существует n независимых собств. векторов $\mathbf{k}_1,\ldots,\mathbf{k}_n$, соответствующих этим собств. значениям. Если A — действительная и симметричная М. и если $\lambda_i \neq \lambda_j$, то $(\mathbf{k}'_i \cdot \mathbf{k}_j) = 0$ ($\mathbf{k}'_i$ — вектор-строка, получающаяся транспонированием вектора-столбца $\mathbf{k}_i$). Если М. A — невырожденная, то собств. значениями М. A^{-1} являются $\lambda_1^{-1},\ldots,\lambda_n^{-1}$, а собств. векторами по-прежнему векторы $\mathbf{k}_1,\ldots,\mathbf{k}_n$. Если $|\lambda_1|$ — наиб. модуль n собств. значений М. A порядка n, то при $p \to \infty$, $A^p x \to \mathbf{k}_1$, где x — произвольный вектор-столбец. Для действительной ортогональной М. A $|\lambda_i| = 1$ для всех i. Если A — симметричная М. и не все собств. значения различны, всё равно можно найти n взаимно ортогональных собств. векторов. Если каждый такой вектор $\mathbf{k}_i$ нормирован, т. е. умножен на $(\mathbf{k}'_i \mathbf{k}_i)^{-1/2}$, то М. $K = \mathbf{k}_1,\ldots,\mathbf{k}_n)$ ортогональна и $K'AK = \mathrm{diag}(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)$. Вообще, если М. A порядка n имеет n разл. собств. значений $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$, к-рым соответствуют независимые собств. векторы $\mathbf{k}_1,\ldots,\mathbf{k}_n$, то М. $T = (\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2,\ldots,\mathbf{k}_n)$ преобразует A в диагональную М.: $T^{-1}AT' = \mathrm{diag}(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)$. Если не все n собств. значений различны, то такое преобразование может оказаться невозможным.

Если H — эрмитова М. порядка n, то её собств. значения всегда действительны и всегда можно найти n собств. векторов $\mathbf{k}_1,\ldots,\mathbf{k}_n$ таких, что $(\mathbf{k}_i^{*\prime} \cdot \mathbf{k}_j) = \delta_{ij}$. Унитарная М. $U = (\boldsymbol{k}_1,\ldots,\boldsymbol{k}_n)$ преобразует H к диагональному виду.

С каждой М. A порядка n связана **квадратичная форма** от n комплексных переменных $x_1, x_2,\ldots,x_n$, образующих столбец $\boldsymbol{x}$:

$$x'Ax = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j .$$

Эрмитова форма $\boldsymbol{x}^+ H \boldsymbol{x}$, где H — эрмитова М., принимает только действит. значения; она наз. **положительно определённой** или **неотрицательной**, если $\boldsymbol{x}^+ H \boldsymbol{x} > 0$ или $\boldsymbol{x}^+ H \boldsymbol{x} \geqslant 0$ для каждого набора $\boldsymbol{x} \neq 0$.

Аналитич. **функцию матрицы** A порядка n определяют при помощи ряда $\sum_{k=0}^{\infty} a_k A^k$ по степеням A. Каждый такой ряд можно свести к многочлену n-й степени от A, т. к. М. A удовлетворяет своему характеристич. ур-нию. М. A наз. **нильпотентной**, если $A^k = 0$ при нек-ром целом положительном k. М. A тогда и только тогда нильпотентна, когда все её собств. значения равны нулю.

М., имеющую более чем одну строку и столбец, можно разбить на меньшие прямоугольные подматрицы (блоки), проведя между столбцами и (или) строками прямые линии. Две соответствующим образом разбитые М. A и B размера $n \times n$ можно перемножить, пользуясь входящими в них подматрицами как элементами в обычной ф-ле произведения М.; получающиеся таким путём элементы произведения являются подматрицами М. AB размера $n \times n$. М., разбитую на блоки, наз. **клеточной** (**блочной**) М. **Прямым** (**внешним**, **кронекеровским**) **произведением** М. A и B наз. блочная М. $C = A \times B$, блоки к-рой имеют вид $a_{ij}B$. Если для М. A, B, C и D существуют произведения AC и BD, то $(A \times B)(C \times D) = AC \times BD$. Если М. A имеет вид

$$A = \begin{Vmatrix} A_1 & 0 & \ldots \\ 0 & A_2 & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots \end{Vmatrix},$$

т. е. является диагональной М. с диагональными элементами в виде квадратных подматриц $A_1, A_2, \ldots$, то такая М. наз. **клеточно-диагональной**. В этом случае $\mathrm{Tr}A = \mathrm{Tr}A_1 + \mathrm{Tr}A_2 + \ldots$, $\det A = \det A_1 \det A_2 \ldots$ Клеточно-диагональной М. является **нормальная** (жорданова) **форма**, к к-рой можно преобразованием подобия привести любую М. При этом в каждой диагональной клетке вдоль гл. диагонали повторяется одно и то же число, а параллельный ряд над гл. диагональю состоит из 1. Все остальные элементы в диагональных клетках равны нулю:

$$A_i = \begin{Vmatrix} \lambda_i & 1 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_i & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_i \end{Vmatrix} .$$

Важную роль играют М. в *квантовой механике*, где динамич. наблюдаемым величинам сопоставляют эрмитовы М., собств. значения к-рых соответствуют экспериментально наблюдаемым значениям этих физ. величин. При описании квантовомеханич. явлений, в к-рых участвуют частицы, обладающие спином, используют *Паули матрицы* и *Дирака матрицы*. В квантовой теории поля, где существенны разл. группы симметрии, рассматривают матричные *представления групп*.

Мн. задачи по обращению М., нахождению их собств. значений и т. д., возникающие в физ. исследованиях, решают с помощью ЭВМ.

Лит.: Мальцев А. И., Основы линейной алгебры, 4 изд., М., 1975; Гантмахер Ф. Р., Теория матриц, 4 изд., М., 1988; Мишина А. П., Проскуряков И. В., Высшая алгебра, 2 изд., М., 1965; Боревич З. И., Определители и матрицы, 3 изд., М., 1988; Беллман Р., Введение в теорию матриц, пер. с англ., 2 изд., М., 1976; Маркус М., Минк Х., Обзор по теории матриц и матричных неравенств, пер. с англ., М., 1972. *С. И. Азаков.*

МАТРИЦА КОГЕРЕНТНОСТИ — (2×2)-матрица, характеризующая поляризац. структуру эл.-магн. поля, элементами к-рой являются корреляц. ф-ции $G_{ij}(\tau) = \langle V_i(t) V_j^*(i + \tau) \rangle$ (см. *Когерентность света*). Здесь $V_i(t)$ — компонента стационарного случайного поля в плоскости, перпендикулярной волновому вектору. (Если волновой вектор направлен, напр., вдоль оси z, то $i, j = x, y$.) При $\tau = 0$ диагональными элементами М. к. являются ср. интенсивности ортогональных компонент $G_{xx}(0) = I_x$, $G_{yy}(0) = I_y$; недиагональные элементы $G_{xy}(0)$, $G_{yx}(0)$ характеризуют взаимную корреляцию компонент.

Элементы М. к. определяют *контраст* интерференционной картины. Поле излучения и ср. интенсивность на выходе поляризатора, ориентированного под углом Θ к оси x, даются соответственно выражениями

$$V(t) = V_x(t) \cos\Theta + V_y(t) e^{i\varphi} \sin\Theta. \quad (1)$$

(φ — фазовый сдвиг между компонентами),

$$I = I_x \cos^2\Theta + I_y \sin^2\Theta + \mathrm{Re}[G_{xy}(0) e^{i\varphi}] \sin 2\Theta. \quad (2)$$

Контраст (видность) интерференц. картины (2)

$$w = \frac{I_{\text{макс}} - I_{\text{мин}}}{I_{\text{макс}} + I_{\text{мин}}} = \frac{|G_{xy}(0)| \sin 2\Theta}{I_x \cos^2\Theta + I_y \sin^2\Theta} . \quad (3)$$

В случае $I_x = I_y$ и $\Theta = \pi/4$ $w = |G_{xy}(0)|/I_x = |\gamma_{xy}|$ (γ_{xy} — степень взаимной когерентности ортогональных компонент). Для неполяризов. излучения $\gamma_{xy} = 0$, т. е. $G_{xy}(0) = G_{yx}^*(0)$. Для полностью поляризов. излучения $|\gamma_{xy}| = 1$. Любую М. к. можно представить в виде суммы матриц для полностью поляризованного и неполяризованного излучений. Степень поляризации, определяемая как отношение интенсивности полностью поляризов. излучения к полной интенсивности, связана с контрастом (3) и даётся выражением

$$P = \left\{ 1 - 4 \frac{\det \| G_{ij} \|}{(\mathrm{Sp}\, \| G_{ij} \|)^2} \right\}^{1/2},$$