Дорфман Я. Г., Всемирная история физики с древнейших времен до кон. XVIII в., М., 1974; его же, Всемирная история физики с нач. XIX до сер. XX вв., М., 1979; Марков М. А., О природе материи, М., 1976; Фундаментальная структура материи, пер. с англ., М., 1984. *И. С. Алексеев.*

МАТРИЦА — прямоугольная таблица

$$\left\|\begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{array}\right\|,$$

состоящая из m строк и n столбцов; её наз. М. размера $m \times n$. Элементами a_{ij} (первый индекс указывает номер строки, второй — номер столбца) М. могут быть числа, ф-ции или др. величины, над к-рыми можно производить алгебраич. операции. М. также обозначают как $\|a_{ij}\|$, (a_{ij}). Наряду с конечными М. рассматривают М. с бесконечным числом строк или столбцов.

М. размера $n \times 1$ наз. столбцом, а размера $1 \times n$ — строкой. М., все элементы к-рой равны нулю, наз. нулевой М. и обозначается 0. М. размера $n \times n$ наз. квадратной М. порядка n. У квадратной М. число строк равно числу столбцов. Квадратная М. $A = \|a_{ij}\|$ наз. треугольной, если $a_{ij} = 0$ при $i > j$, строго треугольной, если $a_{ij} = 0$ при $i \geqslant j$, диагональной, если $a_{ij} = 0$ при $i \neq j$. Диагональная М. обычно обозначается diag $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$. Если все $\alpha_i = \alpha$, получают скалярную М. При $\alpha = 1$ М. наз. единичной и обозначается I или E. В квадратной М. диагональ, проведённая из верхнего левого угла в нижний правый угол, наз. гл. диагональю.

Квадратная М. наз. неособенной (невырожденной), если она имеет единств. обратную М. A^{-1}, определяемую условиями $AA^{-1} = A^{-1}A = I$. В противном случае A — особенная (вырожденная) М. Квадратная М. является неособенной в том и только в том случае, когда её *определитель*, det A, отличен от нуля.

Понятие М. впервые появилось в сер. 19 в. в работах У. Р. Гамильтона (W. R. Hamilton) и А. Кэли (A. Cayley).

Действия над матрицами. Суммой или разностью двух $m \times n$ М. $A = \|a_{ij}\|$ и $B = \|b_{ij}\|$ наз. $m \times n$ М. $C = \|c_{ij}\| = A \pm B$, где $c_{ij} = a_{ij} \pm b_{ij}$. Произведением М. $A = \|a_{ij}\|$ на число α наз. М. с элементами αa_{ij}.

Перемножать две М. можно только тогда, когда число столбцов в 1-м сомножителе равно числу строк во 2-м. Если A — $m \times n$ М., а B — $n \times p$ М., то $m \times p$ М. C с элементами $c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$ наз. произведением М. A и B и обозначается: $C = AB$. Если существуют оба произведения AB и BA (это, в частности, будет всегда, если A и B — квадратные М. одного и того же порядка), то, вообще говоря, $BA \neq AB$. В результате перемножения двух М. можно получить нулевую М., хотя ни одна из перемножаемых М. не является нулевой. Невырожденные М. порядка n образуют *группу* относительно умножения, она наз. полной линейной группой $GL\,(n)$.

Определённые выше операции обладают след. свойствами: $A + B = B + A$, $A + (B + C) = (A + B) + C$, $(AB)C = A(BC)$, $A(B + C) = AB + AC$, $A + 0 = A$, $0B = C0 = 0$, $IA = AI = A$.

Транспонированием М. $A = \|a_{ij}\|$ размера $n \times m$ наз. замена её строк столбцами (1-я строка заменяется на 1-й столбец, 2-я строка на 2-й столбец и т. д.), т. е. это переход к М. $A' = \|a'_{ji}\|$ размера $m \times n$ такой, что $a'_{ij} = a_{ji}$. Комплексным сопряжением М. $A = \|a_{ij}\|$ наз. переход к М. $A^* = \|a^*_{ij}\|$, где * означает комплексное сопряжение. Эрмитовым сопряжением М. $A = \|a_{ij}\|$ размера $n \times m$ наз. переход к М. $A^+ = (A')^* = (A^*)'$ размера $m \times n$. М. A^+ наз. эрмитово сопряжённой с М. A. Имеют место след. соотношения: $(A + B)^+ = A^+ + B^+$, $(\alpha A)^+ = \alpha^* A^+$, $(AB)^+ = B^+A^+$, $(A^{-1})^+ = (A^+)^{-1}$, $(A^+)^+ = A$, $0^+ = 0$, $I^+ = I$.

Квадратные матрицы. Квадратная М. A наз.: симметричной, если $A' = A$; антисимметричной, если $A' = -A$; эрмитовой (самосопряжённой), если $A^+ = A$; антиэрмитовой, если $A^+ = -A$; ортогональной, если $A'A = AA' = I$; унитарной, если $A^+A = AA^+ = I$; унимодулярной, если det$A = 1$. Для каждой М. A с комплексными элементами $S_1 = (A + A')/2$ есть симметричная, $S_2 = (A - A')/2$ — антисимметричная, $H_1 = (A + A^+)/2$ — эрмитова и $H_2 = (A - A^+)/2$ — антиэрмитова М. $A = S_1 + S_2$ — разложение (единств.) данной М. в сумму симметричной и антисимметричной М. $A = H_1 + H_2$ — разложение (единств.) данной М. в сумму эрмитовой и антиэрмитовой М.

Существует т. н. полярное разложение $A = QU$ М. A в произведение эрмитовой М. Q и унитарной М. U. М. Q однозначно определяется условием $Q^2 = A^+A$, а М. U однозначно определяется в том и только в том случае, если A — невырожденная М. (это разложение аналогично представлению комплексного числа в виде $z = re^{i\varphi}$).

М. A, для к-рой выполняется условие $A^+A = AA^+$, наз. нормальной М. М. A нормальна тогда и только тогда, когда её можно преобразовать в диагональную М. D унитарным преобразованием, т. е. $U^{-1}AU = D$.

М. A наз. подобной М. $\tilde{A}$, если существует такая неособенная М. T (преобразующая М.), что $\tilde{A} = T^{-1}AT$; A, $\tilde{A}$ и T должны быть М. одного и того же порядка. Переход от М. A к М. $\tilde{A}$ наз. преобразованием подобия. При каждом преобразовании подобия сохраняются *инварианты матрицы*. Две подобные М. имеют один и тот же ранг, один и тот же *след*, один и тот же определитель. Все подобные М. образуют класс подобных матриц, и важной задачей теории М. является выбор М. простейшего вида в этом классе — приведение М. к канонич. форме. Решение этой задачи тесно связано с нахождением собств. значений М. (см. ниже).

Любая М. подобна треугольной М., диагональные элементы к-рой — собств. значения М. Матрицу A можно преобразованием подобия с унитарной преобразующей матрицей T привести к диагональному виду в том и только в том случае, если A подобна нек-рой нормальной М. В этом случае диагональные элементы М. $\tilde{A} = T^{-1}AT$ являются собств. значениями М. Эрмитовы и унитарные М. (а потому действительные и симметричные или ортогональные М.) представляют собой частные случаи нормальных М., поэтому все они приводятся к диагональному виду.

Теория М. тесно связана с теорией линейных преобразований *векторных пространств* (см. *Линейный оператор*).

Собственными значениями (собств. числами, характеристич. числами) М. $A = \|a_{ij}\|$ наз. корни характеристического уравнения матрицы $\det(A - \lambda I) = 0$. М. удовлетворяет своему характеристич. ур-нию. Если λ — собств. значение М. A порядка n, то существует ненулевой столбец (вектор-столбец) $\mathbf{k}$ такой, что $A\mathbf{k} = \lambda\mathbf{k}$. Этот вектор-столбец наз. собственным (характеристическим) вектором М. A, соответствующим собств. значению λ. Спектром (собств. значений) М. A наз. множество всех её собств. значений. Собств. значения М. A обладают след. свойствами:

$$\mathrm{Tr}A = \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n, \quad \det A = \lambda_1\lambda_2 \ldots \lambda_n,$$

где TrA = след М. A. Следовательно, если хотя бы одно собств. значение равно нулю, то М. является особенной (вырожденной).