Для полного описания процесса колебаний необходимо задать нач. возмущение и нач. скорость

$$u\,|_{t=0} = u_0(x), \qquad \frac{\partial u}{\partial t}\bigg|_{t=0} = u_1(x), \tag{9}$$

а для процесса диффузии — только нач. возмущение

$$u|_{\;t=0} = u_0(x). \tag{10}$$

Кроме того, на границе S области G необходимо удовлетворить заданному режиму. В простейших случаях граничные условия для ур-ний (1), (3), (5) описывают соотношением

$$k\frac{\partial u}{\partial n} + hu|_{\;S} = v(x,t), \quad t > 0, \tag{11}$$

где k и h — заданные неотрицательные ф-ции, не обращающиеся в нуль одновременно, n — внеш. нормаль к поверхности S, v — заданная ф-ция. В случае неогранич. областей, напр. внешности огранич. области, кроме условия на границе задают также условие на бесконечности. Напр., для ур-ния Гельмгольца (8) на бесконечности задают *Зоммерфельда условия излучения.*

Краевая задача, к-рая содержит только нач. условия (и, стало быть, не содержит граничных условий, так что область G — всё пространство $\mathbb{R}^n$), наз. *Коши задачей.* Для ур-ния (1) задача Коши (1), (9) ставится след. образом: найти ф-цию $u(x, t)$, удовлетворяющую ур-нию (1) при $t > 0$ и нач. условиям (9) на плоскости $t = 0$. Аналогично ставится и задача Коши (3), (10) для ур-ния диффузии (3).

Если в краевой задаче присутствуют и нач., и граничные условия, то такая задача наз. смешанной задачей. Для ур-ния (1) смешанная задача (1), (9), (11) ставится так: найти ф-цию $u(x, t)$, удовлетворяющую ур-нию (1) в цилиндре $G \times (0, \infty)$, нач. условиям (9) на его ниж. основании G и граничному условию (11) на его боковой поверхности $S \times [0, \infty)$. Аналогично ставится смешанная задача (3), (10), (11) для ур-ния диффузии (3). Существуют и др. постановки краевых задач.

Для стационарного ур-ния (5) нач. условия отсутствуют и соответствующая краевая задача ставится так: найти ф-цию $u(x)$, удовлетворяющую ур-нию (5) в области G и граничному условию на границе S области G:

$$k\frac{\partial u}{\partial n} + hu|_{\;S} = v(x). \tag{11'}$$

Для ур-ния (5) краевая задача с граничным условием $u|_S = v_0(x)$ наз. *Дирихле задачей*, а с граничным условием $\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_S = v_1(x)$ — *Неймана задачей.* Различают внеш. и внутр. краевые задачи Дирихле и Неймана. Для внеш. задач кроме граничных условий необходимо задавать условия на бесконечности.

К краевым задачам для ур-ния (5) относятся также задачи на собств. значения: найти те значения параметра λ (собств. значения), при к-рых однородное ур-ние

$$Lu \equiv -\operatorname{div}(p \operatorname{grad} u) + qu = \lambda\rho u \tag{12}$$

имеет нетривиальные решения (собств. ф-ции), удовлетворяющие однородному граничному условию

$$k\frac{\partial u}{\partial n} + hu\,|_{\;S} = 0. \tag{13}$$

Если G — огранич. область с достаточно гладкой границей S, то существует счётное число неотрицательных собств. значений $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ задачи (12), (13) ($0 \leqslant \lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \ldots, \lambda \to \infty$), каждое λ_k — конечной кратности; соответствующие собств. ф-ции $u_k(x)$, $Lu_k = \rho\lambda_k u_k$, $k = 1, 2, \ldots$, образуют полную ортонормиров. систему ф-ций; при этом всякая ф-ция, удовлетворяющая граничному условию (13), разлагается в регулярно сходящийся ряд Фурье по системе собств. ф-ций $\{u_k\}$.

Обобщённые задачи. Изложенные постановки краевых задач предполагают достаточную гладкость решения внутри области вплоть до границы. Такие постановки краевых задач наз. классическими. Однако во мн. физ. задачах приходится отказываться от требований гладкости. Внутри области решение может быть *обобщённой функцией* и удовлетворять ур-нию в смысле обобщённых ф-ций, краевые условия могут удовлетворяться в к.-л. обобщённом смысле. Такие краевые задачи наз. обобщёнными, а соответствующие решения — обобщёнными решениями. Напр., обобщённая задача Коши для волнового ур-ния ставится след. образом. Пусть u — классич. решение задачи Коши (2), (9). Ф-ции u и f продолжим нулём на $t < \widetilde{u}$ и обозначим их $\widetilde{u}$ и $\widetilde{f}$ соответственно. Тогда ф-ция $\widetilde{u}$ будет удовлетворять в смысле обобщённых ф-ций во всём пространстве $\mathbb{R}^{n+1}$ волновому ур-нию

$$\partial^2\widetilde{u}/\partial t^2 = a^2\Delta\widetilde{u} + u_0(x)\cdot\delta'(t) + u_1(x)\cdot\delta(t) + \widetilde{f}(x,t). \tag{14}$$

При этом нач. возмущения u_0 и u_1 играют роль мгновенно действующих внеш. источников типа двойного слоя, $u_0(x)\cdot\delta'(t)$, и простого слоя, $u_1(x)\cdot\delta(t)$. Сказанное позволяет ввести след. определение. Обобщённой задачей Коши для волнового ур-ния с источником F (обобщённая ф-ция $F = 0$ при $t < 0$) наз. задача об отыскании тех обобщённых решений $u(x, t)$ в $\mathbb{R}^{n+1}$ волнового ур-ния

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\Delta u + F(x,t), \tag{14'}$$

к-рые обращаются в нуль при $t < 0$. Аналогично ставится обобщённая задача Коши и для ур-ния теплопроводности (4).

Поскольку краевые задачи матем. физики описывают реальные физ. процессы, то они должны удовлетворять след. естеств. требованиям, сформулированным Ж. Адамаром (J. Hadamard): 1) решение должно существовать в нек-ром классе ф-ций M_1; 2) решение должно быть единственным, возможно в др. классе ф-ций M_2; 3) решение должно непрерывно зависеть от данных задачи (нач. и граничных данных, свободных членов, коэф. ур-ния и т. д.). Требование непрерывной зависимости решения возникает в связи с тем, что данные физ. задачи, как правило, определяют из эксперимента приближённо, поэтому необходимо быть уверенным в том, что решение задачи не будет существенно зависеть от погрешностей измерений.

Задача, удовлетворяющая перечисленным требованиям 1—3, наз. корректно поставленной, а множество ф-ций $M_1 \cap M_2$ — классом корректности. Хотя требования 1—3, на первый взгляд, кажутся естественными, их тем не менее необходимо доказывать в рамках принятой матем. модели. Доказательство корректности — первая проверка матем. модели: модель непротиворечива, не содержит паразитных решений и мало чувствительна к погрешностям измерений.

Нахождение корректных постановок краевых задач матем. физики и методов построения их решений (точных или приближённых) и составляет одно из главных содержаний предмета М. ф. у. Известно, что все перечисленные выше краевые задачи поставлены корректно.

Задача, не удовлетворяющая хотя бы одному из условий 1—3, наз. некорректной задачей. Некорректные задачи приобретают в математической физике всё возрастающее значение: к ним в первую очередь относятся обратные задачи, а также задачи, связанные с обработкой и интерпретацией результатов наблюдений.

Важную роль в М. ф. у. играет понятие *Грина функции.* Ф-цией Грина линейного *дифференциального оператора*

$$L(x,t;D) = \sum_{\alpha} a_\alpha(x,t)D^\alpha, \qquad D = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}, \frac{\partial}{\partial t}\right)$$