Если $K_n = K_n(t)$ или $K_n = K_n(x)$, то М.с.п. наз. о д н о р о д н ы м в пространстве или во времени. В последнем случае плотность вероятности переходов зависит лишь от разности времён: $W(x,t\,|y,s) = W(x,t-s|y)$. Простейшим однородным в пространстве и во времени непрерывным М. с. п. является *винеровский случайный процесс*, для к-рого $K_1 = 0$, $K_2 = 1$. Он описывает, напр., свободную диффузию частиц в среде с пост. темп-рой. Простейшим однородным во времени процессом является п р о ц е с с О р н ш т е й н а — У л е н б е к а, для к-рого $K_1 = -hx$, $K_2 = 1$. Ур-ние Фоккера — Планка в этом случае имеет вид

$$\frac{\partial W}{\partial t} = h\frac{\partial}{\partial x}(xW) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}. \qquad (1)$$

Статистич. характеристики М. с. п. находят, исследуя решения кинетич. ур-ний с теми или иными начальными и граничными условиями. Так, плотность вероятности переходов процесса Орнштейна — Уленбека, удовлетворяющая ур-нию (1) с начальным условием $W(x,0|y) = \delta(x-y)$ равна

$$W(x,t\mid y) = \tilde{h}^{1/2}\exp[-\tilde{h}(x-ye^{-ht})^2]/\sqrt{\pi},$$
$$\tilde{h} = h/(1-e^{-2ht}).$$

Для однородных во времени процессов может существовать стационарная плотность вероятности

$$W_{\text{ст}}(x) = \lim_{t\to\infty} W(x,t\mid y),$$

удовлетворяющая, в случае диффузионного процесса, обыкновенному дифференц. ур-нию

$$\frac{d}{dx}(A\,W_{\text{ст}}) = \frac{1}{2}\frac{d^2}{dx^2}(BW_{\text{ст}}).$$

При анализе М. с. п., реализации к-рых обрываются или отражаются на заданных границах, кинетич. ур-ния дополняют граничными условиями.

Реализации М. с. п. с непрерывным временем удовлетворяют дифференц. *стохастическим уравнениям*. Напр., реализации диффузионного процесса $X(t)$ удовлетворяют ур-нию

$$dX/dt = a(X(t),t) + b(X(t),t)\xi(t),$$
$$X(s) = y, \qquad (2)$$

здесь $a(x,t)$ и $b(x,t)$ — детерминиров. ф-ции, а $\xi(t)$ — белый шум, для к-рого

$$\langle\xi\rangle = 0,\quad \langle\xi(t)\xi(t+\tau)\rangle = D\delta(\tau).$$

Кинетич. коэф. диффузионного процесса, описываемого ур-нием (2), равны:

$$A = -a + (D/4)\partial b^2/\partial x,\qquad B = Db.$$

Лит.: С т р а т о н о в и ч Р. Л., Избранные вопросы теории флюктуаций в радиотехнике, М., 1961; Т и х о н о в В. И., М и р о н о в М. А., Марковские процессы, М., 1977; Справочник по теории вероятностей и математической статистике, 2 изд., М., 1985. *А. Н. Малахов, А. И. Саичев.*

МА́РКОВСКОГО ПРОЦЕ́ССА ПРИБЛИЖЕ́НИЕ — приближённый метод решения дифференц. ур-ний, содержащих случайные параметры; основан на малости отношения времени корреляции воздействий τ_0 ко времени корреляции отклика τ_1. Формально соответствует пределу $\tau_0/\tau_1 \to 0$. Непосредственно применим лишь к причинным задачам, в к-рых значения динамич. переменных в нек-рый момент времени функционально не зависят от последующих по времени значений случайных параметров. В физ. задачах М. п. п. является гл. членом разложения по малому параметру τ_0/τ_1 и, в отличие от методов теории возмущений, допускает описание сильных флуктуаций, возникающих в физ. системе под влиянием случайных воздействий.

Пусть поведение *динамической системы* описывается обыкновенными дифференц. ур-ниями:

$$\frac{d\xi_i(t)}{dt} = v_i(\xi_1,\ldots,\xi_n;t) + \varphi_i(\xi_1,\ldots,\xi_n;t),$$
$$\xi_i(t_0) = a_i,\quad i = 1,\ldots,n. \qquad (1)$$

Здесь $v_i(x_1,\ldots,x_n;t)$ — детерминиров. ф-ции своих аргументов, а $\varphi_i(x_1,\ldots,x_n;t)$ — случайная ф-ция $(n+1)$ переменной, обладающая след. свойствами ($\langle\ldots\rangle$ означает статистич. усреднение, $x = \{x_1,\ldots,x_n\}$):

$$\langle\varphi_i(x,t)\rangle = 0, \qquad (2)$$

$$\langle\varphi_i(x,t)\varphi_k(x',t')\rangle = B_{ik}(x,x';t,t'), \qquad (3)$$

$$\varphi_i(x,t) — \textit{гауссовы случайные функции}. \qquad (4)$$

В ур-нии (1) случайна как сама ф-ция $\varphi_i(x,t)$ при детерминиров. аргументах, так и ф-ции $\xi_i(t)$, входящие в аргумент $\varphi_i : \varphi_i(\xi,t)$. Условия (2) — (4) накладываются на случайные ф-ции $\varphi_i(x,t)$ при детерминиров. аргументах.

Если реальную корреляц. ф-цию (3) заменить ф-цией вида

$$B_{ik}(x,x';t,t') \to B^{\text{эфф}}_{ik}(x,x';t,t') = 2F_{ik}(x,x';t)\sigma(t-t')$$

и считать, что входящие в (1) гауссовы случайные ф-ции характеризуются корреляц. ф-цией $B^{\text{эфф}}_{ik}$, то это соответствует замене истинного времени корреляции τ_0 нулём и эквивалентно переходу к М. п. п. При этом в (1) возникают два стремящихся к нулю временны́х масштаба: один — при вычислении производной $d\xi_i/dt = \lim_{\Delta t\to 0}[\xi_i(t+\Delta t) - \xi_i(t)]/\Delta t$, другой — при стремлении к нулю τ_0. Ниже предельный переход $\tau_0 \to 0$ совершают после выполнения перехода $\Delta t \to 0$, т. е. предполагают, что $\Delta t/\tau_0 \to 0$. Ф-ции F_{ik} находят из условия

$$F_{ik}(x,x';t) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} B_{ik}\left(x,x';t+\frac{\tau}{2},\ t-\frac{\tau}{2}\right)d\tau.$$

При сделанных предположениях плотность вероятностей

$$W(x,t) \equiv \langle\delta(\xi_1(t)-x_1)\ldots\delta(\xi_n(t)-x_n)\rangle$$

решения системы (1) удовлетворяет *Эйнштейна — Фоккера — Планка уравнению*

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i}\Big[A_i(x,t)W\Big] = \frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_k}\Big[F_{ik}(x,x';t)W\Big], \qquad (5)$$

где
$$A_i(x,t) = v_i(x,t) + \left[\frac{\partial F_{ik}(x,x';t)}{\partial x_k}\right]_{x'=x},$$

по повторяющимся индексам производится суммирование. Совместная плотность вероятностей для величин $\xi(t_1)$, ..., $\xi(t_n)$ при $t_n \geqslant t_{n-1} \geqslant \ldots \geqslant t_1$ в этом случае распадается на произведение

$$W(x_n,t_n;x_{n-1},t_{n-1};\ldots;x_1,t_1) =$$
$$= P(x_n,t_n\mid x_{n-1},t_{n-1})\cdot P(x_{n-1},t_{n-1}\mid x_{n-2},t_{n-2})\times\ldots$$
$$\times\ldots P(x_2,t_2\mid x_1,t_1)W(x_1,t_1),$$

а ф-ция $P(x,t|x_0,t_0)$ (переходная вероятность) удовлетворяет по переменным x, t ур-нию (5) с нач. условием $P(x,t_0|x_0,t_0) = \delta(x-x_0)$. Т. о., случайный процесс $\xi(t)$ является марковским.

В реальных физ. задачах время корреляции флуктуаций всегда конечно и вопрос о пригодности М. п. п. сводится к учёту конечности малого параметра τ_0/τ_1. Одно из условий применимости М. п. п. всегда имеет вид $t \gg \tau_0$, но обычно возникают и др. условия.

М. п. п. применимо и к причинным задачам, описываемым ур-ниями с частными производными, однако здесь уже нет такой универсальной формулировки, как для обыкновенных дифференц. ур-ний.

Задачи, описываемые дифференц. ур-ниями с двухточечными граничными условиями (напр., в задаче о распространении волны одно из граничных условий