В-третьих, это потенциальные инварианты:

$$A_p^{e,m}\ A_p^{e,m} = A^{e,m}\ A^{e,m} - \varphi^{e,m}\varphi^{e,m} = \text{invar},$$

$$A_p^e\ A_p^m = A^e A^m - \varphi^e\varphi^m = \text{invar},$$

где A^m, φ^m — магн. потенциалы (получающиеся из A^e и φ^e преобразованием перестановочной двойственности), источниками к-рых являются магн. токи j^m и заряды ρ^m. И, наконец, многочисл. комбиниров. инварианты типа $j_p^e\ A_p^e = j^e A^e - c\rho^e\varphi^e = \text{invar}$ и им подобные. Число таких комбиниров. инвариантов (квадратичных, кубичных и т. д.) по полям и источникам неограниченно.

12. Лагранжиан для электромагнитного поля

М. у. могут быть получены из *наименьшего действия принципа*, т. е. их можно совместить с *Эйлера — Лагранжа уравнениями*, обеспечивающими вариационную экстремальность ф-ции *действия*:

$$S = \int\limits_V\int\limits_t \mathcal{L} dV dt,$$

здесь $\mathcal{L}$ — *лагранжиан*, являющийся релятивистски-инвариантной величиной; интегрирование ведётся по 4-мерному объёму V, $(t_2 - t_1)$ с фиксиров. границами. В качестве обобщённых координат принято обычно использовать потенциалы A_α и φ. Поскольку лагранжев формализм должен давать полное (замкнутое) динамич. описание системы, то при его построении нужно принимать во внимание материальные ур-ния. Они фигурируют как зависимости связанных зарядов и токов от полей $\boldsymbol{B}$ и $\boldsymbol{E}$:

$$\rho^e_{\text{св}} = -\nabla \boldsymbol{P}^e(\boldsymbol{B},\boldsymbol{E}),$$

$$\boldsymbol{j}^e_{\text{св}} = \frac{\partial}{\partial t}\ \boldsymbol{P}^e(\boldsymbol{B},\boldsymbol{E}) + [\nabla \boldsymbol{P}^m(\boldsymbol{B},\boldsymbol{E})].$$

В результате лагранжиан принимает вид инвариантной комбинации полей, потенциалов и источников:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{8\pi}(E^2 - B^2) - \rho^e\varphi^e - \rho^e_{\text{св}}\varphi^e + \frac{1}{c}\ \boldsymbol{j}^e\boldsymbol{A}^e + \frac{1}{c}\ \boldsymbol{j}^e_{\text{св}}\ \boldsymbol{A}^e.$$

А ур-ния Эйлера — Лагранжа для нек-рой обобщённой координаты $\psi = (\varphi, A_1, A_2, A_3)$ получают приравниванием нулю соответствующих вариационных производных:

$$\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\psi} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi} - \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial\psi/\partial t)}\right) - \nabla_\alpha\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\nabla_\alpha\psi)} = 0.$$

Для $\psi = \varphi$ приходим к (4), для $\psi = A_1, A_2, A_3$ — к ур-нию (1) в соответствующих обозначениях. Вариационный подход позволяет придать теории универсальную форму описания, распространяемую и на описания динамики любых взаимодействий, даёт возможность получать ур-ния для комбиниров. динамич. систем, напр. электромеханических. В частности, для систем с сосредоточенными параметрами, характеризуемых конечным числом степеней свободы, соответствующие ур-ния наз. ур-ниями Лагранжа — Максвелла.

13. Единственность решений Максвелла уравнений

Различают теоремы единственности для стационарных и нестационарных процессов. Условия единственности нестационарных решений извлекаются из *Пойнтинга теоремы*, где источники считаются заданными ф-циями координат и времени. Если бы они порождали два разл. поля, то разность этих полей в вакууме (или в любой линейной материальной среде) вследствие принципа суперпозиции была бы решением однородных М. у. Для обращения этой разности в нуль и, следовательно, получения единств. решения достаточно удовлетворить след. трём условиям. 1) На поверхности S, окружающей область V, где ищется поле, должны быть заданы тангенциальные составляющие поля $\boldsymbol{E}_{\text{тан}}$ или поля $\boldsymbol{H}_{\text{тан}}$ либо соотношения между ними импедансного типа: $\boldsymbol{E}_{\text{тан}} = (c/4\pi)Z[\boldsymbol{nH}]$ ($\boldsymbol{n}$ — нормаль к S) со значениями Z, исключающими приток энергии извне. К таковым относятся, в частности, условия излучения (см. *Зоммерфельда условия излучения*), к-рым удовлетворяют волны в однородной среде на больших расстояниях от источников. Во всех случаях поток энергии для разностного поля вообще исчезает или направлен наружу (из объёма). 2) В нач. момент времени должны быть заданы все поля всюду внутри V. 3) Плотность *энергии электромагнитного поля* $W = (1/8\pi)(\boldsymbol{ED} + \boldsymbol{HB})$ должна быть положительна (вакуум, среды с $\varepsilon > 0$, $\mu > 0$). Эта частная теорема единственности обобщается на среды с нелокальными связями, а также на нек-рые виды параметрич. сред. Однако в нелинейных средах, где принцип суперпозиции не работает, никаких общих утверждений о единственности не существует.

В стационарных режимах нач. условия выпадают, и теоремы единственности формулируются непосредственно для установившихся решений. Так, в электростатике достаточно задать все источники $\rho^e_{\text{ст}}$, все полные заряды на изолиров. проводниках или их потенциалы, чтобы при соответствующих условиях на бесконечности (нужное спадание поля) решение было бы единственным. Аналогичные теоремы устанавливаются для магнитостатики и электродинамики пост. токов в проводящих средах.

Особо выделяется случай синусоидальных во времени процессов, для к-рых формулируют след. признаки, достаточные для получения единств. решения: 1) задание источников $\boldsymbol{j}^e(\boldsymbol{r})e^{i\omega t}$; 2) задание $\boldsymbol{E}_{\text{тан}}$ или $\boldsymbol{H}_{\text{тан}}$ на ограничивающей объём V поверхности S или соответствующих импедансных условий, обеспечивающих отсутствие потока вектора Пойнтинга внутрь V; 3) наличие малого поглощения внутри V или малой утечки энергии через S для исключения существования собств. колебаний на частоте ω.

14. Классификация приближений Максвелла уравнений

Классификация приближений М. у. обычно основывается на безразмерных параметрах, определяющих и критерии подобия для эл.-магн. полей. В вакууме таким параметром является отношение $a = \Delta L/c\Delta T$, где ΔL — характерный масштаб изменения полей (либо размер области, в к-рой ищется решение), ΔT — характерный временной масштаб изменения полей.

а) $a = 0$ — статич. приближение, статика.

Система М. у. распадается на три.

I.

$$[\nabla\boldsymbol{E}] = 0 \quad \Rightarrow \boldsymbol{E} = -\nabla\varphi,$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{D} = 4\pi\rho,$$

$$\boldsymbol{D} = \boldsymbol{E} + 4\pi\boldsymbol{P}^e(\boldsymbol{E}) + 4\pi\boldsymbol{P}^e_{\text{ст}}.$$

Материальная связь в простейшем случае имеет вид $\boldsymbol{P}^e(\boldsymbol{E}) = \chi^e\boldsymbol{E}$. Это система М. у. для электростатики, в к-рой источниками служат заданные распределения плотности электрич. заряда ρ и сторонней поляризации $\boldsymbol{P}^e_{\text{ст}}$. В однородной среде ($\varepsilon = \text{const}$) эл.-статич. потенциал φ определяется *Пуассона уравнением*

$$\Delta\varphi = -\frac{4\pi}{\varepsilon}\rho.$$