Здесь θ — произвольный угл. параметр; в частности, при $\theta = 0$ получаются тождественные преобразования, а при $\theta = \pi/2$ — стандартные преобразования перестановочной двойственности (операция $e \rightleftarrows m$): замена $\boldsymbol{E} \to \boldsymbol{H}$, $\boldsymbol{H} \to -\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{D} \to \boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{B} \to -\boldsymbol{D}$ даёт в областях, свободных от источников, новое решение М. у. При этом, однако, оно меняет местами ур-ния (1) $\rightleftarrows$ (2), (3) $\rightleftarrows$ (4) и, следовательно, там, где раньше были распределены электрич. источники, возникают источники магнитные ($\rho^e \to \rho^m$, $j^e \to j^m$, $\rho^m \to -\rho^e$, $j^m \to j^e$). Поэтому с точки зрения двойственной симметрии М. у. задание материальных связей в виде $\boldsymbol{D} = \boldsymbol{D}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{H})$ и $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{H})$ представляется вполне удобным. Дуально-симметричные М. у. обладают рядом достоинств, по крайней мере в чисто методич. плане. Так, напр., они симметризуют скачки тангенциальных компонентов магн. и электрич. полей и, если задание $\boldsymbol{H}_{\text{тан}}$ на поверхности идеальной электрич. стенки эквивалентно заданию поверхностного электрич. тока, то задание $\boldsymbol{E}_{\text{тан}}$ на идеальной магн. стенке сводится к заданию магн. поверхностного тока: $[\boldsymbol{n}_{1,2}\boldsymbol{E}_2] = -\frac{4\pi}{c}\, \boldsymbol{j}^{m}_{\text{пов}}$. Таким сведе́нием задач с заданными полями к задачам с заданными токами широко пользуются в теории дифракции волн, в частности в дифракции радиоволн.

Принцип перестановочной двойственности является представителем класса дискретных преобразований (см. *Симметрия*), оставляющих инвариантными М. у. Такого же сорта преобразованиями являются, в частности, операция обращения времени ($\hat{T}$) $x_\alpha \to x_\alpha$, $t \to -t$, $\boldsymbol{E} \to \boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{D} \to \boldsymbol{D}$, $\boldsymbol{H} \to -\boldsymbol{H}$, $\boldsymbol{B} \to -\boldsymbol{B}$, $\rho^e \to \rho^e$, $\boldsymbol{j}^e \to -\boldsymbol{j}^e$, операция зеркального отражения ($\hat{P}$)$x_\alpha \to -x_\alpha$, $t \to t$, $\boldsymbol{E} \to -\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{j}^e \to -\boldsymbol{j}^e$, $\boldsymbol{H} \to \boldsymbol{H}$, $\boldsymbol{B} \to \boldsymbol{B}$, $\rho^e \to \rho^e$, операция обращения знаков зарядов ($\hat{C}$) $\rho^e \to -\rho^e$, $\boldsymbol{j}^e \to -\boldsymbol{j}^e$, $\boldsymbol{E} \to -\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{D} \to -\boldsymbol{D}$, $\boldsymbol{H} \to -\boldsymbol{H}$, $\boldsymbol{B} \to -\boldsymbol{B}$ и любые последовательно осуществляемые комбинации операций $\hat{P}\hat{T}\hat{C}$.

10. Максвелла уравнения в четырёхмерном представлении

Придавая времени t смысл четвёртой координаты и представляя её чисто мнимой величиной $x_4 = ict$ (см. *Минковского пространство-время*), можно заключить описание электромагнетизма в компактную форму. Эл.-магн. поле в 4-описании может быть задано двумя антисимметричными тензорами H_{pq} и E_{pq}:

$$\{H_{\alpha\beta} = e_{\alpha\beta\gamma}H_\gamma, \quad H_{\alpha 4} = -iD_\alpha\}, \tag{13}$$

$$\{E_{\alpha\beta} = e_{\alpha\beta\gamma}E_\gamma, \quad E_{\alpha 4} = iB_\alpha\}, \tag{14}$$

где $e_{\alpha\beta\gamma}$ — *Леви-Чивиты символ*, лат. индексы пробегают значения 1, 2, 3, 4, а греческие — 1, 2, 3. В 4-векторе тока объединены обычная плотность тока $\boldsymbol{j}^e$ и плотность электрич. заряда ρ^e:

$$j^e_p = (\boldsymbol{j}^e, ic\rho^e),$$

аналогично вводят 4-вектор магн. тока.

В этих обозначениях М. у. допускают компактное 4-мерное представление:

$$\frac{\partial H_{pq}}{\partial x_q} = \frac{4\pi}{c}\, j^e_p, \tag{15 а}$$

$$\frac{\partial E_{pq}}{\partial x_q} = -\frac{4\pi}{c}\, j^m_p. \tag{15 б}$$

Взаимной заменой векторов поля и индукции в ф-лах (13), (14) вводятся тензоры индукции эл.-магн. поля B_{pq} и D_{pq}:

$$\left.\begin{array}{ll} \{B_{\alpha\beta} = e_{\alpha\beta\gamma}B_\gamma, & B_{\alpha 4} = -iE_\alpha\}, \\ \{D_{\alpha\beta} = e_{\alpha\beta\gamma}D_\gamma, & D_{\alpha 4} = iH_\alpha\}, \end{array}\right. \tag{16}$$

через к-рые также могут быть записаны М. у.:

$$\frac{1}{2i}\, e_{pqrs}\, \frac{\partial D_{rs}}{\partial x_q} = \frac{4\pi}{c}\, j^e_p, \tag{17}$$

$$\frac{1}{2i}\, e_{pqrs}\, \frac{\partial B_{rs}}{\partial x_q} = \frac{4\pi}{c}\, j^m_p. \tag{18}$$

Любая пара тензорных ур-ний, содержащая в правых частях оба 4-тока (электрич. и магн.), тождественна системе М. у. Чаще используют пару ур-ний (15 *а*), (18), при этом материальные ур-ния сводятся к функциональной связи между тензорами H_{pq} и B_{pq} (последний чаще обозначают через F_{pq}).

Из антисимметрии тензоров поля, индукции и М. у. в форме (17) — (18) следует равенство нулю 4-дивергенций 4-токов:

$$\frac{\partial}{\partial x_p}\, j^{e,m}_p = 0,$$

к-рое представляет собой 4-мерную запись ур-ний непрерывности для электрич. (магн.) зарядов. Т. о., 4-векторы токов являются чисто вихревыми, и соотношения (17), (18) можно рассматривать как их представление в виде 4-роторов соответствующих тензоров.

Наряду с представленным здесь вариантом часто используется также 4-мерное описание, в к-ром временна́я координата (обычно с индексом 0) берётся действительной, но 4-мерному пространству приписывается гиперболич. сигнатура (+, —, —, —); в таком пространстве приходится различать ко- и контравариантные компоненты векторов и тензоров (см. *Ковариантность и контравариантность*).

11. Лоренц-инвариантность Максвелла уравнений

Все экспериментально регистрируемые эл.-динамич. явления удовлетворяют *относительности принципу*. Вид М. у. сохраняется при линейных преобразованиях, оставляющих неизменным интервал $ds^2 = (dx_4)^2 - (dx_1)^2 - (dx_2)^2 - (dx_3)^2$ и составляющих 10-мерную *Пуанкаре группу*: 4 трансляции Δx_γ, 3 пространственных (орто-) поворота (x_1x_2, x_1x_3, x_2x_3) и 3 пространственно-временных (орто-хроно-) поворота, иногда называемых лоренцевыми вращениями. Последние соответствуют перемещениям системы отсчёта вдоль осей x_α с пост. скоростями $dx_\alpha/dx_4 = u_\alpha/ic = \text{const}$. В частности, для $\alpha = 1$ получается простейшая разновидность *Лоренца преобразований*: $x'_{2,3} = x_{2,3}$, $x'_1 = \gamma(x_1 - u_1 t)$, $t' = \gamma(t - u_1x_1/c^2)$, где $\gamma = 1/\sqrt{1 - u_1^2/c^2}$. Соответственно поля преобразуются по правилам:

$$E'_1 = E_1, \quad D'_1 = D_1, \quad B'_1 = B_1, \quad H'_1 = H_1,$$

$$E'_{2,3} = \gamma\left(E_{2,3} + \frac{1}{c}\,[\boldsymbol{uB}]_{2,3}\right),$$

$$B'_{2,3} = \gamma\left(B_{2,3} - \frac{1}{c}\,[\boldsymbol{uE}]_{2,3}\right),$$

$$H'_{2,3} = \gamma\left(H_{2,3} - \frac{1}{c}\,[\boldsymbol{uD}]_{2,3}\right),$$

$$D'_{2,3} = \gamma\left(D_{2,3} + \frac{1}{c}\,[\boldsymbol{uH}]_{2,3}\right).$$

Релятивистски-ковариантная запись М. у. позволяет легко находить инвариантные комбинации полей, токов и потенциалов (4-скаляров или инвариантов *Лоренца группы*), сохраняющихся, в частности, при переходе от одной инерциальной системы отсчёта к другой. Во-первых, это чисто полевые инварианты (см. *Инварианты электромагнитного поля*). Во-вторых, это токовые (источниковые) инварианты:

$$j^{e,m}_p\, j^{e,m}_p = \boldsymbol{j}^{e,m}\, \boldsymbol{j}^{e,m} - c^2(\rho^{e,m})^2 = \text{invar},$$

$$j^e_p\, j^m_p = \boldsymbol{j}^e\, \boldsymbol{j}^m - c^2\rho^e\rho^m = \text{invar}.$$