строго говоря, во всех окружающих точках $\boldsymbol{r}'$, но обычно всё-таки в пределах нек-рой конечной её окрестности: $\boldsymbol{D}(\boldsymbol{r}) = \int \varepsilon(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}')dV'$. При преобразовании Фурье по $\boldsymbol{r}$ это приводит к появлению зависимостей $\varepsilon(\mathbf{k})$ и $\mu(\mathbf{k})$; такие среды наз. средами с пространственной дисперсией (см. *Дисперсия пространственная*).

В проводящих средах входящая в М. у. (1) — (5) плотность тока $\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r},t)$ состоит из двух слагаемых: одно по-прежнему является сторонним током $j_{\text{ст}}$, обусловленным заданным перемещением электрич. зарядов под действием сторонних сил (обычно неэлектрич. происхождения), а другое — током проводимости $j_{\text{пр}}$, зависящим от полей, определяемых системой М. у., и связанным с ними материальными ур-ниями вида $j_{\text{пр}} = j_{\text{пр}}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{B})$. В простейшем случае эта зависимость сводится к локальному *Ома закону*:

$$j^e = j^e_{\text{ст}} + j^e_{\text{пр}} = j^e_{\text{ст}} + \sigma \boldsymbol{E}, \qquad (11)$$

где σ — *электропроводность* (проводимость) среды. Иногда в (11) вводят обозначение $j^e_{\text{ст}} = \sigma \boldsymbol{E}_{\text{ст}}$, благодаря к-рому различают системы с заданными токами и системы с заданными полями (напряжениями). Для синусоидальных во времени полей, подчинённых ур-ниям (1*б*) — (4*б*) и материальным связям (10) и (11), вводится комплексная диэлектрич. проницаемость, объединяющая (10) и (11), $\tilde{\varepsilon} = \varepsilon' - i\varepsilon''$, мнимая часть к-рой обусловлена проводимостью и определяет *диссипацию энергии* эл.-магн. поля в среде. По аналогии вводится комплексная магн. проницаемость $\tilde{\mu} = \mu' - i\mu''$, мнимая часть к-рой обусловливает потери, связанные с перемагничиванием среды. Комплексные проницаемости в общем случае зависят от частоты ω и волнового вектора $\mathbf{k}$; эти зависимости не могут быть произвольными: *причинности принцип* связывает их действительные и мнимые части *Крамерса — Кронига соотношениями.*

В общем случае вид материальных ур-ний зависит также и от системы отсчёта, в к-рой эти ур-ния рассматривают. Так, если в неподвижной системе K среда характеризуется простейшими ур-ниями (10), то в инерциальной системе K', движущейся относительно K с пост. скоростью $\boldsymbol{u}$, появляется анизотропия:

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{D}'_{\parallel} = \varepsilon \boldsymbol{E}', \quad \boldsymbol{H}'_{\parallel} = \frac{1}{\mu}\boldsymbol{B}'_{\parallel}, \\ &\boldsymbol{D}'_{\perp} = \left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)^{-1}\left\{\varepsilon\left(\boldsymbol{E}'_{\perp} - \frac{1}{c}[\boldsymbol{u}\boldsymbol{B}']\right) + \right. \\ &\qquad \left. + \frac{1}{\mu}\left[\frac{\boldsymbol{u}}{c}\left(\boldsymbol{B}' + \left[\frac{\boldsymbol{u}}{c}\boldsymbol{E}'\right]\right)\right]\right\}, \qquad (12) \\ &\boldsymbol{H}'_{\perp} = \left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)^{-1}\left\{\frac{1}{\mu}\left(\boldsymbol{B}'_{\perp} + \left[\frac{\boldsymbol{u}}{c}\boldsymbol{D}'\right]\right) - \right. \\ &\qquad \left. - \varepsilon\left[\frac{\boldsymbol{u}}{c}\left(\boldsymbol{D}' - \left[\frac{\boldsymbol{u}}{c}\boldsymbol{H}'\right]\right)\right]\right\}, \end{aligned}$$

где индексы $\parallel$ и $\perp$ обозначают продольные и поперечные к $\boldsymbol{u}$ составляющие векторов. В рамках алгебраич. М. у. (1*в*) — (4*в*) материальные ур-ния (12) могут быть переписаны в виде

$$D'_{\alpha} = \varepsilon_{\alpha\beta}(\omega,\mathbf{k})E'_{\beta}, \quad B'_{\alpha} = \mu_{\alpha\beta}(\omega,\mathbf{k})H'_{\beta},$$

что можно трактовать как наличие временной и пространственной дисперсии. Исследование процессов с материальными связями типа (12) составляет предмет *электродинамики движущихся сред.* Заметим, что хотя характеристики ε и μ удобно симметризуют материальные ур-ния, их введение не является непременным условием замыкания М. у. Соответствующей перенормировкой допустимо свести описание магн. поля к одновекторному, т. е. сделать $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{H}$, $\mu = 1$, но при этом даже для изотропной среды диэлектрич. проницаемость становится тензором, она различна для вихревых и потенциальных полей. Физически это связано с неоднозначностью модельного представления дипольных моментов, во всяком случае при $\omega \neq 0$ они могут равноправно интерпретироваться и как зарядовые, и как токовые.

8. Граничные условия

Поскольку М. у. справедливы для любых (в рамках применимости макроэлектродинамики) неоднородных сред, то в областях резкого изменения их параметров иногда можно игнорировать тонкую структуру распределения полей в переходном слое и ограничиться «сшиванием» полей по разные стороны от него, заменяя тем самым переходный слой матем. поверхностью — границей, лишённой толщины. Если внутри переходной области имелись заряды с объёмной плотностью ρ или токи с объёмной плотностью $\boldsymbol{j}$, то при сжатии слоя в поверхность сохраняются их интегральные значения — вводятся поверхностные заряды $\rho_{\text{пов}}$ и поверхностные токи $\boldsymbol{j}_{\text{пов}}$: $\rho_{\text{пов}} = \int\limits_{\Delta x}\rho dx$, $\boldsymbol{j}_{\text{пов}} = \int\limits_{\Delta x}\boldsymbol{j}dx$, где Δx — толщина переходного слоя.

Применение М. у. и ур-ния непрерывности приводит к следующим граничным условиям:

$$\left[\boldsymbol{n}_{1,2}(\boldsymbol{H}_2 - \boldsymbol{H}_1)\right] = \frac{4\pi}{c}\boldsymbol{j}_{\text{пов}}, \qquad (1г)$$

$$[\boldsymbol{n}_{1,2}(\boldsymbol{E}_2 - \boldsymbol{E}_1)] = 0, \qquad (2г)$$

$$\boldsymbol{n}_{1,2}(\boldsymbol{B}_2 - \boldsymbol{B}_1) = 0, \qquad (3г)$$

$$\boldsymbol{n}_{1,2}(\boldsymbol{D}_2 - \boldsymbol{D}_1) = 4\pi\rho_{\text{пов}}, \qquad (4г)$$

$$\boldsymbol{n}_{1,2}(\boldsymbol{j}_2 - \boldsymbol{j}_1) = -\frac{\partial}{\partial t}\rho_{\text{пов}}. \qquad (5г)$$

Здесь индексы 1 и 2 характеризуют поля по разные стороны от границы, а $\boldsymbol{n}_{1,2}$ — единичный вектор нормали к поверхности, направленный из среды 1 в среду 2. Правила (1*г*) — (5*г*) пригодны для перехода через любые поверхности, независимо от того, совпадают ли они с границами раздела сред или проходят по однородным областям, поэтому их иногда наз. поверхностными М. у.

Иногда граничные условия (1*г*) — (5*г*) порождают краевые условия, т. е. задают не правила перехода через границу, а сами поля на ней. Напр., внутри идеального проводника ($\sigma = \infty$) в силу (11) $\boldsymbol{E} = 0$ (иначе возник бы ток неограниченной плотности), поэтому на границе раздела диэлектрик — идеальный проводник в согласии с (2*г*) $[\boldsymbol{n}_{1,2}\boldsymbol{E}_2] = 0$. Такие границы наз. идеальными электрич. стенками. Аналогично вводится понятие идеальной магн. стенки, на к-рой $[\boldsymbol{n}_{1,2}\boldsymbol{H}_2] = 0$. Если структура полей по одну сторону от границы универсальна, т. е. не зависит от распределения полей по др. сторону, то краевые условия могут состоять в задании не самих полей, а лишь связей между ними, напр. $\boldsymbol{E}_{\text{тан}} = (c/4\pi)Z[\boldsymbol{n}_{1,2}\boldsymbol{H}]$, где Z — нек-рая скалярная или тензорная ф-ция координат границы ($\boldsymbol{E}_{\text{тан}}$ — тангенциальный компонент $\boldsymbol{E}$). К условиям такого рода относится, в частности, *Леонтовича граничное условие* для синусоидально меняющихся во времени полей на поверхности хороших проводников.

9. Двойственная симметрия Максвелла уравнений

Двойственная симметрия М. у. имеет место для любой формы их записи. Она состоит в инвариантности М. у. относительно линейных преобразований полей, производимых по след. правилам:

$$\boldsymbol{E}' = \boldsymbol{E}\cos\theta + \boldsymbol{H}\sin\theta, \quad \boldsymbol{H}' = \boldsymbol{H}\cos\theta - \boldsymbol{E}\sin\theta,$$

$$\boldsymbol{D}' = \boldsymbol{D}\cos\theta + \boldsymbol{B}\sin\theta, \quad \boldsymbol{B}' = \boldsymbol{B}\cos\theta - \boldsymbol{D}\sin\theta.$$