$$\oint \boldsymbol{H} d\boldsymbol{l} = \frac{4\pi}{c}\int_S \boldsymbol{j} d\boldsymbol{S} + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\int_S \boldsymbol{D} d\boldsymbol{S}\,, \qquad (1a)$$

$$\oint \boldsymbol{E} d\boldsymbol{l} = -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\int_S \boldsymbol{B} d\boldsymbol{S}\,, \qquad (2a)$$

$$\oint \boldsymbol{B} d\boldsymbol{S} = 0, \qquad (3a)$$

$$\oint \boldsymbol{D} d\boldsymbol{S} = 4\pi \int_V \rho dV. \qquad (4a)$$

Криволинейные интегралы в (1*a*), (2*a*) берутся по произвольному замкнутому контуру (их наз. циркуляциями векторных полей), а стоящие в правых частях поверхностные интегралы — по поверхностям, ограниченным этими контурами (опирающимся на них), причём направление циркуляции (направление элемента контура $d\boldsymbol{l}$) связано с направлением нормали к S (вектор $d\boldsymbol{S}$) правовинтовым соотношением (если в качестве исходного выбрано пространство с правыми системами координат). В интегралах по замкнутым поверхностям (S) в (3*a*), (4*a*) направление вектора элемента площади $d\boldsymbol{S}$ совпадает с наружной нормалью к поверхности; V — объём, ограниченный замкнутой поверхностью S.

М. у. в форме (1*a*) — (4*a*) предназначаются не только для изучения топологич. свойств эл.-магн. полей, но и являются удобным аппаратом решения конкретных задач электродинамики в системах с достаточно высокой симметрией или с априорно известными распределениями полей. Кроме того, в матем. отношении эта система ур-ний содержательнее системы (1) — (4), поскольку пригодна для описания разрывных, недифференцируемых распределений полей. Но в отношении физ. пределов применимости обе системы ур-ний равнозначны, т. к. любые скачки полей в макроэлектродинамике должны рассматриваться как пределы микромасштабно плавных переходов, с тем чтобы внутри них сохранялась возможность усреднения ур-ний Лоренца — Максвелла. С этими оговорками резкие скачки можно описывать и в рамках М. у. (1) — (4), прибегая к аппарату *обобщённых функций*.

Наконец, М. у. в интегральной форме облегчают физ. интерпретацию мн. эл.-магн. явлений и поэтому нагляднее сопоставляются с теми экспериментально установленными законами, к-рым они обязаны своим происхождением. Так, ур-ние (1*a*) есть обобщение Био — Савара закона (с добавлением к току $I = \int_S \boldsymbol{j} d\boldsymbol{S}$ максвелловского *смещения тока*). Ур-ние (2*a*) выражает закон индукции Фарадея; иногда его правую часть переобозначают через «магн. ток смещения»

$$I^m_{\text{см}} = \int j^m_{\text{см}}\, d\boldsymbol{S} = \frac{1}{4\pi}\frac{\partial \Phi_B}{\partial t}, \qquad j^m_{\text{см}} = \frac{1}{4\pi}\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t},$$

где $j^m_{\text{см}}$ — плотность «магн. тока смещения», Φ_B — магн. поток. Ур-ние (3*a*) связывают с именем Гаусса (C. F. Gauß), установившим соленоидальность поля $\boldsymbol{B}$, обусловленную отсутствием истинных магн. зарядов. Впрочем вопрос о существовании *магнитных монополей* пока остаётся открытым. Но соответствующее обобщение М. у. произведено (Хевисайд, 1885) на основе принципа двойственной симметрии М. у. (см. в разделе 9), для чего в (2) и (2*a*) наряду с магн. током смещения вводится ещё и «истинный» магн. ток (процедура, обратная проделанной когда-то Максвеллом с электрич. током в первом ур-нии), а в ур-ние Гаусса (3), (3*a*) — магн. заряд

$$Q^m = \frac{1}{4\pi}\int \rho^m dV = \frac{1}{4\pi}\oint \boldsymbol{B} d\boldsymbol{S}\,,$$

где ρ^m — плотность магн. заряда. Фактически все экспериментальные установки для регистрации ожидаемых магнитных монополей основаны на этом предположении. Наконец, ур-ние (4*a*) определяет поле свободного электрич. заряда; его иногда называют законом Кулона (Ch. A. Coulomb), хотя, строго говоря, оно не содержит утверждения о силе взаимодействия между зарядами, да и к тому же справедливо не только в электростатике, но и для систем с произвольным изменением поля во времени. На тех же основаниях иногда и ур-ние (1*a*) связывают с именем Ампера (A. Ampère).

4. Общая характеристика Максвелла уравнений

Совокупность М. у. (1) — (4) составляет систему из восьми (двух векторных и двух скалярных) линейных дифференц. ур-ний 1-го порядка для четырёх векторов ($\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{H}$, $\boldsymbol{D}$). Источники (скаляр ρ и вектор $\boldsymbol{j}$) не могут быть заданы произвольно; применяя операцию (∇) к ур-нию (1) и подставляя результат в (4), получаем:

$$\nabla \boldsymbol{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0, \qquad (5)$$

или в интегральной форме:

$$\oint \boldsymbol{j} d\boldsymbol{S} + \frac{\partial}{\partial t}\int \rho dV = 0. \qquad (5a)$$

Это ур-ние непрерывности для тока, содержащее в себе закон сохранения заряда для замкнутых изолиров. областей ($\oint \boldsymbol{j} d\boldsymbol{S} = 0$, $\int \rho dV = \text{const}$),— один из фундам. физ. принципов, подтверждаемых в любых экспериментах.

Ур-ния (1) — (4) распадаются на два самостоят. «блока»: ур-ния (1) и (4), содержащие векторы $\boldsymbol{D}$, $\boldsymbol{H}$ и источники ρ, $\boldsymbol{j}$, и ур-ния (2) и (3) — однородные ур-ния для $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{B}$, не содержащие источников. Ур-ния (2) и (3) допускают получение общего решения, в к-ром $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{B}$ выражаются через т. н. *потенциалы электромагнитного поля* $\boldsymbol{A}^e$ и φ^e. При этом ур-ние (3) «почти следует» из (2), т. к. операция (∇), применённая к (2), даёт $\nabla \boldsymbol{B} = \text{const}$, что отличается от (3) только константой, определяемой нач. условиями. Аналогично ур-ние (4) «почти следует» из (1) и ур-ния непрерывности (5).

Система М. у. (1) — (4) не является полной: по существу, она связывает 4 векторные величины двумя векторными ур-ниями. Её замыкание осуществляется путём добавления соотношений, связывающих векторы 1-го «блока» $\boldsymbol{D}$ и $\boldsymbol{H}$ с векторами 2-го «блока» $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{B}$. Эти соотношения зависят от свойств сред (материальных сред), в к-рых происходят эл.-магн. процессы, и наз. материальными ур-ниями (см. раздел 7).

5. Максвелла уравнения для комплексных амплитуд

В силу линейности системы (1) — (4) для её решений справедлив *суперпозиции принцип*. Часто оказывается удобным фурье-представление общего решения (1) — (4) как ф-ции времени (см. *Фурье преобразование*). Записывая временной фактор в виде $\exp(i\omega t)$, для комплексных фурье-амплитуд ($\boldsymbol{E}_\omega$, $\boldsymbol{H}_\omega$ и т. д.) получаем систему ур-ний

$$[\nabla \boldsymbol{H}_\omega] - \frac{i\omega}{c}\boldsymbol{D}_\omega = \frac{4\pi}{c}\boldsymbol{j}_\omega, \qquad (1б)$$

$$[\nabla \boldsymbol{E}_\omega] + \frac{i\omega}{c}\boldsymbol{B}_\omega = 0, \qquad (2б)$$

$$\nabla \boldsymbol{B}_\omega = 0, \qquad (3б)$$

$$\nabla \boldsymbol{D}_\omega = 4\pi\rho_\omega. \qquad (4б)$$

Система (1б) — (4б) в нек-ром смысле удобнее (1) — (4), ибо упрощает применение к эл.-динамич. системам, обладающим временной дисперсией (см. раздел 7), т. е. зависимостью параметров от частоты ω.

6. Алгебраические Максвелла уравнения

Если распространить (в силу линейности М. у.) фурье-разложение и на зависимость полей от пространственных координат, т. е. представить общее решение ур-ний (1) — (4) в виде суперпозиции плоских волн ти-