а действие — в виде $S=\int \mathscr{L}(\boldsymbol{x}, t) d\boldsymbol{x}\, dt$, где плотность ф-ции Лагранжа $\mathscr{L}$, называемая *лагранжианом*, зависит от полей (и, как правило, от их первых производных), взятых в одной и той же точке пространства-времени $\boldsymbol{x}$, t. [Иногда термин «лагранжиан» используют и для самой ф-ции Лагранжа $L(t)$, а $\mathscr{L}$ наз. плотностью лагранжиана.]

В релятивистской теории и действие S, и лагранжиан $\mathscr{L}$ являются скалярами относительно преобразований *Пуанкаре группы*. В четырёхмерных обозначениях переменные $(t, \boldsymbol{x})=\{x_\mu\}=x$ ($\mu=0, 1, 2, 3$) входят равноправно, и действие записывается как локальный функционал полей и их первых производных, заданных на нек-рой 4-области Ω:

$$S=\int_\Omega \mathscr{L}(x)\, dx, \quad \mathscr{L}(x)=\mathscr{L}(\varphi^a(x), \partial_\mu \varphi^a(x), x)$$

(принято сокращение $\partial_\mu=\partial/\partial x_\mu$).

В механике и теории поля постулируется фундаментальный *наименьшего действия принцип*, утверждающий, что для реальных движений системы функционал S принимает экстрем. значение, т. е. его вариации $\delta S=0$. Ур-ния движения получаются из него по правилам вариац. исчисления как условия экстремума; они наз. *Эйлера — Лагранжа уравнениями* и имеют вид

$$\partial \mathscr{L}/\partial \varphi^a - d_\mu[\partial \mathscr{L}/\partial(\partial_\mu \varphi^a)]=0,$$

где $d_\mu = d/dx_\mu$ — «полная частная производная», учитывающая зависимость $\mathscr{L}$ от x как явную, так и через поля $\varphi^a(x)$, по повторяющемуся индексу μ предполагается суммирование. Т. о., задание формы лагранжиана полностью определяет ур-ния движения. [Для систем со связями $\chi_j(\varphi^a, \partial_\mu \varphi^a, x)=0$ вариац. принцип применяется к модифициров. лагранжиану $\mathscr{L}'(x)=\mathscr{L}(x)+\sum_j \chi_j \lambda_j(x)$, причём множители Лагранжа $\lambda_j(x)$ находятся интегрированием соответственно модифициров. ур-ний Эйлера — Лагранжа.]

При наличии в теории симметрии Л. ф. позволяет, помимо ур-ний движения, найти соответствующие *сохранения законы* с помощью *Нётер теоремы*. В силу этой теоремы из инвариантности действия относительно каждой однопараметрич. группы преобразований симметрии следует сохранение одной явно строящейся ф-ции координат и скоростей $F(q, \dot q, t)$. В релятивистской теории аналогом момента времени t служит пространственноподобная поверхность σ, а аналогом сохранения во времени, $dF/dt=0$, является независимость от σ соответствующего функционала σ, полей и их производных:

$$F[\sigma; \varphi^a, \partial_\mu \varphi^a]=\int_\sigma d\sigma_\nu F_\nu(\varphi^a(x), \partial_\nu \varphi^a(x), x):$$

$$\delta F[\sigma; \varphi^a, \partial_\mu \varphi^a]/\delta\sigma=0.$$

Иными словами, каждой сохраняющейся величине F отвечает локальный четырёхмерный «ток» $F_\nu(x)$, удовлетворяющий дифференц. закону сохранения $\partial_\nu F_\nu(x)=0$.

В частности, всякое релятивистское описание должно быть инвариантно относительно трансляций и вращений в 4-пространстве (образующих 10-параметрич. группу Пуанкаре). Инвариантность S относительно преобразований группы Пуанкаре приводит к сохранению четырёх компонент энергии-импульса P_μ и шести компонент момента $M_{\mu\varkappa}=-M_{\varkappa\mu}$. Если взять поверхность σ в виде $x_0=t$, то они выражаются ф-лами

$$P_\mu=\int dx\, T_{\mu 0}(x), \quad M_{\mu\varkappa}=\int dx\, M_{\mu\varkappa, 0}$$

через свои «токи» — тензоры энергии-импульса $T_{\mu\nu}$ и момента $M_{\mu\varkappa,\nu}$, удовлетворяющие дифференциальным законам сохранения $\partial_\nu T_{\mu\nu}=0$ и $\partial_\nu M_{\mu\varkappa,\nu}=0$. Эти тензоры находятся по заданному $\mathscr{L}$ по формулам

$$T_{\mu\nu}=(\partial\mathscr{L}/\partial(\partial_\mu\varphi^a))\,\partial_\nu\varphi^a-g_{\mu\nu}\mathscr{L},$$

$$M_{\mu\varkappa,\nu}=x_\mu T_{\nu\varkappa}-x_\varkappa T_{\nu\mu}+(\partial\mathscr{L}/\partial(\partial_\nu\varphi^a))\, s^{ab}_{\mu\varkappa}\varphi^b,$$

где матрица s^{ab} описывает изменение многокомпонентного поля φ^a при бесконечно малом преобразовании Лоренца с параметром $\omega_{\mu\varkappa}$, $\delta\varphi^a={}^1/_2 s^{ab}_{\mu\varkappa}\varphi^b\omega_{\mu\varkappa}$. Если в теории имеются и др. группы симметрии, т. е. действие инвариантно относительно преобразований из этих групп, теорема Нётер даёт дополнит. сохраняющиеся величины (напр., заряды; см. *Квантовая теория поля*). В *гамильтоновом формализме* выясняется, что сохраняющиеся величины являются генераторами соответствующих преобразований симметрии. (Отметим, что в теориях, содержащих *динамические симметрии*, возникают дополнит. законы сохранения, к-рые не могут быть получены из теоремы Нётер.)

Т. о., лагранжиан полностью определяет теорию: Л. ф. даёт ур-ния движения и сохраняющиеся динамич. величины. Напротив, по заданной теории лагранжиан восстанавливается неоднозначно, напр. к нему всегда можно добавить 4-дивергенцию любой ф-ции, что не сказывается ни на ур-ниях движения, ни на сохраняющихся величинах.

Л. ф. играет важную эвристич. роль при построении матем. описания новой области явлений. Действительно, в соответствии с требованиями инвариантности относительно преобразований из группы Пуанкаре и др. групп симметрии $\mathscr{L}$ может зависеть только от инвариантных комбинаций полей, к-рые нетрудно перечислить. Если по соображениям простоты оставить в $\mathscr{L}$ инварианты миним. степени по полям, получающиеся из Л. ф. ур-ния движения часто оказываются линейными. В этом случае они наз. уравнениями свободного поля. Так, для векторного поля с абелевой калибровочной группой (напр., эл.-магн. поля) все возможные лагранжианы эквивалентны выражению $-{}^1/_4 F_{\mu\nu}F_{\mu\nu}$, где тензор поля $F_{\nu\mu}=\partial_\mu A_\nu-\partial_\nu A_\mu$, A_μ — 4-потенциал, а ур-ния свободного поля имеют вид $\partial_\mu F_{\mu\nu}=0$. В случае более сложной симметрии, напр. с неабелевой калибровочной группой, тензор поля

$$F^a_{\mu\nu}=\partial_\mu A^a_\nu-\partial_\nu A^a_\mu-t^{abc}A^b_\mu A^c_\nu$$

(где t^{abc} — структурные константы группы), а простейший лагранжиан $\mathscr{L}=-{}^1/_4 F^a_{\mu\nu}F^a_{\mu\nu}$. Уже простейшие нетривиальные ур-ния оказываются нелинейными по полю: $\nabla^{ab}_\mu F^b_{\mu\nu}=0$, где $\nabla^{ab}_\mu=\delta^{ab}\partial_\mu-t^{abc}A^c_\mu$ — *ковариантная производная* для данной калибровочной группы.

Квантовая теория поля заимствует у классической весь Л. ф. с той лишь разницей, что полевые ф-ции являются теперь не c-числами, а, вообще говоря, некоммутирующими операторами. Поэтому операция варьирования, применяемая для вывода ур-ний движения и получения динамич. величин, требует доопределения [5, 6]; в ряде случаев (напр., в квантовой электродинамике) оно сводится к той или иной симметризации операторов.

Фундам. роль Л. ф. была вскрыта в лагранжевой форме квантовой динамики [Р. Фейнман (R. Feynman), 1948] — третьем, наряду с традиционными шрёдингеровым и гейзенберговым, способе её построения. На этом пути отщепление квантовой теории от классической связано с разными законами композиции вероятностей перехода между последоват. состояниями a, b, c, ... динамич. системы. В то время как в классич. теории для вероятностей P имеет место интуитивно очевидный мультипликативный закон композиции $P_{ac}=\sum_b P_{ab}P_{bc}$ (здесь «суммирование» производится