частицы среды друг от друга (этими параметрами могут быть значения координат x_0, y_0, z_0 в нек-рый момент времени t_0), X, Y, Z — проекции объёмных сил, p — давление, ρ — плотность. Получены Ж. Лагранжем (J. Lagrange) ок. 1780.

Решение общей задачи гидромеханики в переменных Лагранжа сводится к тому, чтобы, зная X, Y, Z, а также начальные и граничные условия, определить x, y, z, p, ρ как ф-ции времени и параметров a_1, a_2, a_3. Для решения этой задачи необходимо к ур-ниям (1) присоединить ур-ние неразрывности, имеющее в переменных Лагранжа вид

$$\rho(a_1, a_2, a_3, t)\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial a_1} & \frac{\partial y}{\partial a_1} & \frac{\partial z}{\partial a_1} \\ \frac{\partial x}{\partial a_2} & \frac{\partial y}{\partial a_2} & \frac{\partial z}{\partial a_2} \\ \frac{\partial x}{\partial a_3} & \frac{\partial y}{\partial a_3} & \frac{\partial z}{\partial a_3} \end{vmatrix} = \rho_0(a_1, a_2, a_3, t_0)\begin{vmatrix} \frac{\partial x_0}{\partial a_1} & \frac{\partial y_0}{\partial a_1} & \frac{\partial z_0}{\partial a_1} \\ \frac{\partial x_0}{\partial a_2} & \frac{\partial y_0}{\partial a_2} & \frac{\partial z_0}{\partial a_2} \\ \frac{\partial x_0}{\partial a_3} & \frac{\partial y_0}{\partial a_3} & \frac{\partial z_0}{\partial a_3} \end{vmatrix}, \qquad (2)$$

и ур-ние состояния $\rho = f(p)$ для баротропного движения или $\rho = \text{const}$ для несжимаемой жидкости. Если зависимости x, y, z от a_1, a_2, a_3, t найдены, то траектории, скорости и ускорения частиц определяются обычными методами кинематики точки.

Обычно при решении задач гидромеханики пользуются *Эйлера уравнениями*. Л. у. применяются гл. обр. при изучении нестационарных движений, в частности колебат. движений жидкости, в нек-рых вопросах теории турбулентности.

Лит. см. при ст. *Гидроаэромеханика*. *С. М. Тарг.*

ЛАГРА́НЖА УРАВНЕ́НИЯ механики. 1) Лагранжа уравнения 1-го рода — дифференциальные ур-ния движения механич. системы, к-рые даны в проекциях на прямоугольные координатные оси и содержат т. н. множители Лагранжа. Получены Ж. Лагранжем в 1788. Для *голономной системы*, состоящей из n материальных точек, на к-рую наложено k связей вида

$$f_i(x_1, y_1, z_1; \ldots; x_n, y_n, z_n; t) = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, k), \quad (1)$$

Л. у. 1-го рода имеют вид

$$\left.\begin{aligned} m_\nu \ddot{x}_\nu &= F_{\nu x} + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \frac{\partial f_i}{\partial x_\nu} \\ m_\nu \ddot{y}_\nu &= F_{\nu y} + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \frac{\partial f_i}{\partial y_\nu} \\ m_\nu \ddot{z}_\nu &= F_{\nu z} + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \frac{\partial f_i}{\partial z_\nu} \end{aligned}\right\} \quad (\nu = 1, 2, \ldots, n), \qquad (2)$$

где m_ν — массы точек системы; x_ν, y_ν, z_ν — координаты этих точек; $F_{\nu x}$, $F_{\nu y}$, $F_{\nu z}$ — проекции приложенных к каждой точке активных сил; λ_i — неопределённые множители, пропорциональные реакциям соответствующих связей; t — время. Аналогичные ур-ния могут составляться и для *неголономных систем*. Ур-ния (2) совместно с (1) дают систему $3n+k$ дифференциальных ур-ний, из к-рых находятся $3n$ неизвестных ф-ций $x_\nu(t)$, $y_\nu(t)$, $z_\nu(t)$, дающих закон движения точек системы, и k множителей $\lambda(t)$, позволяющих определить проекции реакций связей по ф-лам

$$N_{\nu x} = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \frac{\partial f_i}{\partial x_\nu}, \quad N_{\nu y} = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \frac{\partial f_i}{\partial y_\nu},$$

$$N_{\nu z} = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \frac{\partial f_i}{\partial z_\nu}$$

Для отыскания закона движения ур-ниями (2) пользуются редко, т. к. интегрирование системы $3n+k$ ур-ний, когда n велико, связано с большими трудностями. Однако если закон движения будет найден другим путём (напр., с помощью ур-ний Лагранжа 2-го рода), то по ур-ниям (2), в к-рых левые части известны, можно определять реакции связей.

2) Лагранжа уравнения 2-го рода — дифференциальные ур-ния движения механич. системы, в к-рых параметрами, определяющими положение системы, являются независимые между собой *обобщённые координаты*. Для голономных систем Л. у. 2-го рода имеют в общем случае вид

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i \quad (i = 1, 2, \ldots, s), \qquad (3)$$

где q_i — обобщённые координаты, число к-рых равно числу s степеней свободы системы, $\dot{q}_i$ — обобщённые скорости, Q_i — обобщённые силы.

Для составления ур-ний (3) надо, выбрав q, определить кинетич. энергию системы в её движении относительно *инерциальной системы отсчёта* и выразить эту величину явно через q_i и $\dot{q}_i$, т. е. найти $T(q_i, \dot{q}_i, t)$; время войдёт сюда при нестационарных связях. Значения Q_i находятся по заданным (активным) силам, в число к-рых при неидеальных связях включают и силы трения. С матем. точки зрения ур-ния (3) представляют собой систему обыкновенных дифференциальных ур-ний 2-го порядка относительно координат q_i; интегрируя эти ур-ния и определяя постоянные интегрирования по нач. условиям, находят $q_i(t)$, т. е. закон движения системы в обобщённых координатах.

По сравнению с ур-ниями в декартовых координатах (см., напр., ур-ния Лагранжа 1-го рода) ур-ния (3) обладают тем важным преимуществом, что число их равно числу степеней свободы системы и не зависит от кол-ва входящих в систему материальных частиц или тел; кроме того, при идеальных связях из ур-ний (3) автоматически исключаются все наперёд неизвестные реакции связей. Л. у. 2-го рода, дающими весьма общий и притом достаточно простой метод решения задач, широко пользуются для изучения движения разл. механич. систем, в частности в динамике механизмов и машин, в теории *гироскопа*, в теории колебаний и др.

Для неголономной системы, на к-рую, кроме геом. связей, учитываемых выбором координат q, наложено ещё k дифференциальных связей, выражаемых равенствами

$$A_{\varkappa 0} + \sum_{i=1}^{k} A_{\varkappa i}\dot{q}_i = 0 \quad (\varkappa = 1, 2, \ldots, k), \qquad (4)$$

Л. у. 2-го рода принимают вид

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i + \sum_{\varkappa=1}^{k} \mu_\varkappa A_{\varkappa i} \quad (i = 1, 2, \ldots, s). \quad (5)$$

Ур-ния (5) совместно с (4) дают возможность определить s неизвестных координат q_i и k наперёд неизвестных множителей $\mu_\varkappa$ как ф-ций времени.

В физике особое значение имеет та форма Л. у., к-рую они принимают в случае голономной системы, находящейся под действием одних только потенц. сил (см. *Консервативная система*). Если ввести ф-цию Лагранжа (лагранжиан) L, равную в этом случае разности между кинетической T и потенциальной Π энергиями системы:

$$L(q_i, \dot{q}_i, t) = T(q_i, \dot{q}_i, t) - \Pi(q_i),$$

то, т. к. для потенц. сил $Q_i = -\partial\Pi/\partial q_i$, равенства (3) примут вид

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0. \qquad (6)$$