представляющее собой универсальную модель для описания одномерных нелинейных волн в средах с дисперсией без диссипации, в к-рых закон дисперсии для линейных волн описывается двумя членами разложения по степеням волнового числа $k$: $\omega = sk(1+\varepsilon k^2)$. Предложено Д. Кортевегом (D. Korteweg) и Г. де Фрисом (G. de Vries) в 1895 в связи с задачей о волнах на поверхности жидкости. К.— де Ф. у. описывает магнитозвуковые и ионно-звуковые волны в плазме, акустич. волны в кристаллах, поверхностные и внутр. волны в океане.

Для К.— де Ф. у. найдены точные решения разл. вида, одно из осн.— *солитон*, или уединённая волна,

$$u = 2\varkappa^2 \operatorname{ch}^{-2}[\varkappa(x - 4\varkappa^2 t - x_0)],$$

амплитуда солитона $\varkappa^2$ и положение его центра $x_0$ — произвольные постоянные. Убывающее при $x \to \pm\infty$ нач. возмущение, эволюционируя согласно К.— де Ф. у., распадается на ряд невзаимодействующих солитонов, распространяющихся влево, и на осциллирующий и затухающий фон, распространяющийся вправо. Поведение решения при $t \to \infty$ вычисляется по нач. данным. При помощи *обратной задачи рассеяния метода* можно найти для К.— де Ф. у. бесконечные наборы точных решений, простейшим является $N$-солитонное: $u = 2\partial^2 \ln\Delta/\partial x^2$, где $\Delta$ — определитель матрицы

$$\Delta_{ij} = \delta_{ij} + M_i^2(\varkappa_i + \varkappa_j)^{-1}\exp[-(\varkappa_i+\varkappa_j)x + 8\varkappa_i^3 t],$$

$\varkappa_i$, $M_i$ ($i=1, 2, \ldots, N$) — произвольные пост., $\delta_{ij}$ — единичная матрица. При $t \to \pm\infty$ $N$-солитонное решение распадается на $N$ свободных солитонов с параметрами $\varkappa_i$. В процессе взаимодействия солитоны испытывают упругие столкновения, приводящие к сдвигу их центров. Полный сдвиг каждого солитона равен сумме сдвигов при парных столкновениях.

Простейшим периодич. решением является бегущая кноидальная волна, описываемая эллиптич. косинусом $\operatorname{cn}(x-ct)$, с чем и связано её название:

$$(x - ct - x_0) = \int (2E + cu^2 - 2u^3)^{-1/2}\, du,$$

здесь $c$, $E$ — параметры волны. При $E \to 0$ кноидальная волна переходит в набор периодически расположенных солитонов.

К.— де Ф. у. допускает также автомодельные решения (см. *Автомодельность*), к-рые выражаются через решения *Пенлеве уравнений*. Для построения и преобразования решений К.— де Ф. у. можно использовать *Беклунда преобразования*.

К.— де Ф. у. имеет бесконечный набор интегралов движения

$$I_n = \int P_n(u, u_x, \ldots)\, dx, \quad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

где $P_n$ — полином от ф-ции $u$ и её производных, в частности $P_0 = u$; $P_1 = u^2$; $P_2 = u^3 - u_x^2/2$; $P_3 = (u_{xx}^2 + 5uu_x^2 + 5u^2)/2$. При помощи функциональной производной $\delta/\delta u$ К.— де Ф. у. можно записать в виде

$$u_t + (\partial/\partial x)\,\delta I_2/\delta u = 0, \qquad (1)$$

откуда следует, что оно является *гамильтоновой системой* с ф-цией Гамильтона $I_2$ и скобкой Пуассона

$$\{\alpha, \beta\} = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\delta\alpha}{\delta u}\frac{\partial}{\partial x}\frac{\delta\beta}{\delta u} - \frac{\delta\beta}{\delta u}\frac{\partial}{\partial x}\frac{\delta\alpha}{\delta u}\right)dx.$$

Поскольку $\{I_n, I_m\} = 0$, можно показать, что К.— де Ф. у.— интегрируемая гамильтонова система, и явно ввести переменные: действие — угол. Гамильтонова структура (1) не является единственной, выбором скобок Пуассона можно сделать ф-цией Гамильтона любой из интегралов $I_n$.

Рассматривают также «высшие К.— де Ф. у.»:

$$u_t + (\partial/\partial x)\,\delta I_n/\delta u = 0, \quad n = 3, 4, \ldots,$$

их свойства аналогичны свойствам обычного К.— де Ф. у. В диссипативных средах К.— де Ф. у. переходит в Бюргерса — Кортевега — де Фриса уравнение

$$u_t + 6uu_x + u_{xxx} = \nu u_{xx}, \qquad (2)$$

к к-рому (в отличие от К.— де Ф. у. и *Бюргерса уравнения*) точные методы не применимы. Стационарные решения ур-ния (2) описывают структуру ударных волн в средах с дисперсией, в частности *бесстолкновительных ударных волн* в плазме. В двумерном случае К.— де Ф. у. переходит в *Кадомцева — Петвиашвили уравнение*.

*Лит.:* Уизем Дж., Линейные и нелинейные волны, пер. с англ., М., 1977; Теория солитонов. Метод обратной задачи, М., 1980.

*В. Е. Захаров.*

**КОСВЕННОЕ ОБМЕННОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ** (непрямое обменное взаимодействие) — *обменное взаимодействие* между спиновыми степенями свободы локализованных электронов (или атомных ядер) через возмущение др. электронной подсистемы: диамагнитных ионов (лигандов), окружающих магн. ионы в *магнитных диэлектриках*, либо электронов проводимости в *полупроводниках* и *металлах* [1].

В ранних опытах по адиабатич. размагничиванию парамагнитных солей (30-е гг. 20 в.) было обнаружено, что магн. моменты ионов $d$- или $f$-элементов (имеющих незаполненные $d$- или $f$-электронные оболочки в атомах) оказываются не вполне свободными даже в тех случаях, когда ионы разделены диамагнитными группами (ионы галоидов, молекулы воды и др.) и перекрытие $d(f)$-*волновых функций* (орбиталей) на разных узлах *кристаллической решётки* пренебрежимо мало. Тем самым, хотя обменная связь существует, прямое обменное взаимодействие (в духе модели Гайтлера — Лондона — Гейзенберга для молекулы $H_2$) в этом случае является чрезвычайно слабым. Х. А. Крамерс (H. A. Kramers), опираясь на идею Ф. Блоха (F. Bloch), в 1934 показал, что обменная связь магн. ионов, окружённых диамагнитными ионами, может осуществляться через виртуальные возбуждения диамагнитной подсистемы кристалла. Ф. Андерсон (Ph. Anderson) в 1950 развил эту идею и применил её к объяснению антиферромагнитных свойств соединений $d$-металлов типа MnO. Природу К. о. в. Крамерса—Андерсона (т. н. сверхобменного взаимодействия) можно пояснить на простой задаче «трёх центров, четырёх электронов», являющейся предельной идеализацией случая MnO (рис.). Из рис. видно, что виртуальные процессы, обусловливающие К. о. в., таковы: перескок электрона из заполненной оболочки лиганда (иона $O^{2-}$) в $d$-оболочку магн. иона $Mn^{2+}$ (*б*); переворот спинов оставшегося электрона лиганда и спина $d$-электрона др. магн. иона вследствие прямого обменного взаимодействия (*в*); перескок $d$-электрона из оболочки первого иона обратно в оболочку лиганда. Тем самым возникает выигрыш в энергии осн. состояния системы с антипараллельными спинами относительно состояния с параллельными спинами, в к-ром один из процессов *б* или *в* невозможен. Возникающая зависимость полной энергии кристалла от суммарного спина в данном случае благоприятствует антиферромагнитному упорядочению магн. моментов. Величина К. о. в. Крамерса — Андерсона порядка $\varepsilon^4$, где $\varepsilon$ — параметр перекрытия волновых $d$-ф-ций парамагнитного иона и волновых ф-ций электронов лиганда. Теория К. о. в. Крамерса — Андерсона при применении к реальным кристаллам требует рассмотрения большого числа промежуточных возбуждённых состояний, слагаемых высших порядков по $\varepsilon$ и т. д. Андерсон в 1959 предложил поэтому др. подход [2], в к-ром на первом этапе в рамках теории поля лигандов (*внутрикристаллического поля*) определяются волновые ф-ции магн. иона в диамагнитном окружении без учёта обменных взаимодействий с др. магн. ионами; при этом $d$-ф-ции оказываются медленно спадающими с расстоянием за счёт примеси состояний электронов лигандов. На втором этапе рассматриваются обменные